Aprendizaje de física experimental
El Aula-Laboratorio en casa

Propuestas experimentales para estudiantes - Versión 1.0

José Di Laccio-Andrés Monetta-Javier Carro

Por sugerencias y erratas: `jdilaccio@gmail.com`
Abril de 2020

El Laboratorio en casa

Índice general

Laboratorio 5

El Laboratorio en casa

1. Sistema de masa y resorte

1.1 Sistema de masa y resorte: oscilaciones libres

1.1.1 Ecuación de movimiento

En ausencia de fuerzas disipativas, el sistema masa-resorte es un oscilador armónico simple. Si se toma como referencia la posición de equilibrio la ecuación de movimiento del sistema es:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t) \tag{1.1}$$

Si se define $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, la ecuación puede escribirse:

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t) \tag{1.2}$$

Una solución posible de esta ecuación diferencial es:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{1.3}$$

Los parámetros A y φ son determinados por las condiciones iniciales. Por su parte ω_0 es una propiedad dinámica del sistema llamada frecuencia angular de oscilación.

1.1.2 El período de oscilación

El período de oscilación es $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ cuya expresión equivalente es $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$ que puede escribirse:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{k} \tag{1.4}$$

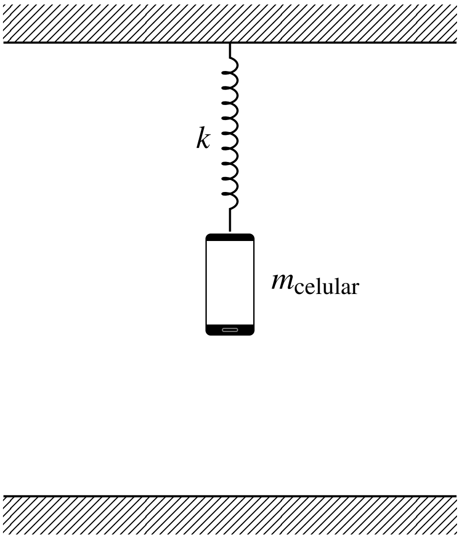

Figura 1.1: Diagrama esquemático de un oscilador amortiguado basado en un sistema masa resorte.

1.2 Oscilaciones amortiguadas

El efecto del aire u otro fluido es el de ejercer una fuerza disipativa que se opone a la velocidad relativa entre el móvil y el fluido. Si el fluido se supone en reposo estos tipos de fuerzas se pueden modelar como proporcionales a alguna potencia de la velocidad:

$$\vec{F} = -bv^n \hat{v}, \tag{1.5}$$

donde $\hat{v}$ es un versor con la dirección de la velocidad $\vec{v}$ del oscilador y b una constante dimensionada que determina el módulo de la fuerza. Para objetos pequeños que se desplazan en el aire, $n = 1$ y para velocidades menores a $\approx 24m/s$, para velocidades mayores (pero menores a la velocidad del sonido en el medio) la disipación crece más rápido con la velocidad y se utiliza $n = 2$ [4].

Sobre la masa m del sistema de la figura 1.1 actúan la tensión del resorte (supuesto lineal, de constante k), el peso $m\vec{g}$ y la fricción del medio, que supondremos lineal con la velocidad. La ecuación de movimiento se puede expresar:

$$\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \tag{1.6}$$

donde $\gamma = \frac{b}{m} > 0$ es el parámetro de amortiguamiento y $\omega_0^2 = \frac{k}{m} > 0$ es la frecuencia natural del oscilador (en ausencia de amortiguamiento). La variable $x(t)$ es el desplazamiento desde la posición de equilibrio. Con la masa en reposo, midiendo desde un punto fijo O adecuado, la coordenada de m es:

$$y_0 = l + \frac{mg}{k}, \tag{1.7}$$

donde l es la longitud natural del resorte. Midiendo el desplazamiento y de la masa desde el mismo origen O, el desplazamiento del equilibrio es $x = y - y_0$. La solución general de la ecuación 1.6 se puede obtener sustituyendo $x \sim e^{\lambda t}$ y resolviendo para λ la ecuación algebraica resultante: $\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$. Las soluciones son $\lambda = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + \omega_0^2}$, dependiendo de el discriminante, $\Delta = \frac{\gamma^2}{4} + \omega_0^2$, tendremos tres situaciones diferentes.

1.2.1 Régimen subamortiguado

Si $\Delta < 0 \rightarrow \frac{\gamma^2}{4} < \omega_0^2$, el régimen es subamortiguado. Definimos la frecuencia $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} > 0$ y la solución, que es oscilatoria, se puede escribir en la forma

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2t}} \cos f_0(\omega t + \varphi) \tag{1.8}$$

donde A y φ son constantes determinadas por las condiciones iniciales. Observe que la amplitud de oscilación:

$$A(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2t}}, \tag{1.9}$$

decrece exponencialmente con un tiempo característico (o constante de tiempo) $\tau = \frac{2}{\gamma} = \frac{2m}{b}$. Es decir, en un tiempo $t = \tau$, la amplitud cae a $\frac{1}{e} \approx 0.37$ de su valor inicial. Si se evalúa la ecuación1.9 en máximos consecutivos a tiempos t_0, $t_0 + T$, $t_0 + 2T$, ..., $t_0 + nT$, el cociente:

$$\frac{x(t_0)}{x(t_0 + nT)} = e^{-\frac{\gamma}{2n}T}, \tag{1.10}$$

se conoce como el decremento del movimiento y depende solo de φ y de $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

1.2.2 Régimen críticamente amortiguado

Si $\Delta = 0 \rightarrow \frac{\gamma^2}{4} = \omega_0^2$, el régimen es críticamente amortiguado. En este caso, el amortiguamiento ya es “grande” y evita que el sistema realice un movimiento oscilatorio. Para $\frac{\gamma^2}{4} = \omega_0^2$ resultan dos raíces reales e iguales, es decir con multiplicidad uno, $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\gamma}{2}$ y el desplazamiento no se puede parametrizar en la forma $e^{\lambda t}$, sino que se requiere un término lineal,

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\frac{\gamma}{2t}}, \tag{1.11}$$

donde A y B se determinan por las condiciones iniciales. Si se parte del reposo, el comportamiento es el de una función monótona decreciente hasta llegar a cero.

1.2.3 Régimen sobreamortiguado

Si $\Delta > 0 \rightarrow \frac{\gamma^2}{4} > \omega_0^2$, el régimen es sobreamortiguado, en este caso, definimos $\lambda = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$ y la solución es una combinación lineal de exponenciales reales:

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2t}}(Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t}), \tag{1.12}$$

con A y B dados por las condiciones iniciales. Observe que no es una frecuencia, ya que no hay oscilación en este caso.

1.3 Proyecto 1: Oscilaciones libres

1.3.1 Introducción

Existen diferentes métodos de toma de datos experimentales que permiten estudiar las oscilaciones de un sistema mecánico. Varios autores han proporcionado una amplia gama de posibilidades [1, 2, 3, 5]. En este proyecto se propone analizar las oscilaciones de un sistema de masa y resorte vertical y evaluar si los datos experimentales se ajustan o no al modelo de oscilaciones libres. Para el caso de oscilaciones se busca verificar la tan importante relación: $T^2 = \frac{4\pi^2 m}{k}$ al graficar el período al cuadrado en función de la masa.

1.3.2 Equipo

Un smartphone con una aplicación para medir las componentes de la aceleración, un resorte, plomadas de 30, 50, 80 o 100 g , una regla o cinta métrica y opcionalmente una computadora personal.

1.3.3 Sugerencias de trabajo

- De forma aproximada determine la constante elástica del resorte usando una pesa de masa conocida (puede ser su propio celular) y midiendo el estiramiento.
- Prepare su dispositivo experimental como se muestra en la figura 1.1.
- Configure adecuadamente su aplicación para medir componentes de la aceleración desde las herramientas de AndroSensor. Se sugiere un intervalo de medición de $0.02s$.
- Con el teléfono en la posición de equilibrio inicie la recolección de datos, luego estire el resorte unos centímetros y libérelo desde el reposo dejando que logre su estado de régimen estacionario.
- Grafique $a_y(t)$ vs t y luego seleccione entre sus datos unas 4 a 8 oscilaciones, asegurándose que el sistema está en régimen. Con estas determine el período promedio de sus oscilaciones. Anote la masa correspondiente.
- Varíe la masa del teléfono agregando lastres y mida el nuevo período de oscilación. Repita lo anterior para al menos 8 masas diferentes.
- Grafique el T^2 vs m y coteje sus resultados con la ecuación 1.4. ¿Se cumple la relación entre el período cuadrado y la masa?
- Mediante el ajuste adecuado de sus datos determine k con su incertidumbre estadística.

1.4 Proyecto 2: Oscilaciones amortiguadas

1.4.1 Introducción

En el caso de oscilaciones amortiguadas se busca determinar el coeficiente de amortiguamiento del sistema en el aire. Para esta parte se pondrá a oscilar el sistema y a registrar su aceleración durante un tiempo tal que permita una reducción significativa de la amplitud de oscilación.

1.4.2 Equipo

Un smartphone con una aplicación para medir las componentes de la aceleración, un resorte y opcionalmente una computadora personal.

1.4.3 Sugerencias de trabajo

- Prepare su dispositivo experimental como se muestra en la figura 1.1.
- Configure adecuadamente su aplicación para medir componentes de la aceleración desde las herramientas de AndroSensor. Se sugiere un intervalo de medición de $0.02s$.
- Con el teléfono en la posición de equilibrio inicie la recolección de datos, luego estire el resorte unos centímetros y libérelo desde el reposo. Deje oscilar el sistema hasta que a simple vista se detecte una disminución significativa de la amplitud de oscilación.
- ¿Qué tipo de amortiguamiento se obtiene en este caso? ¿Cómo lo sabe?
- ¿Se ajustan sus datos a la expresión:

  $$y(t) = a_0 e^{-(\frac{\gamma}{2})^t} cos(\omega t + \varphi)?$$

  Genere la función anterior con parámetros ajustables manualmente los cuales comparará con los resultados experimentales. En caso afirmativo, ¿cuáles son los mejores valores para los parámetros a_0, ω y φ?
- Para cuantificar la calidad del ajuste de sus datos experimentales con su modelo teórico use como estimador el desvío cuadrático medio:

  $$RMSD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_t - y_{exp})^2}{N}},$$

  donde y_t es el valor teórico del modelo, y_{exp} es el dato experimental y N es el número de datos. ¿Qué tan bueno es el ajuste? Explique.
- Determine la frecuencia angular de oscilación y el coeficiente de amortiguamiento con su incertidumbre.
- A partir del ajuste de sus datos, es decir el modelo obtenido mediante el ajuste de parámetros, integre la aceleración para obtener la velocidad como función del tiempo y luego integre la velocidad para obtener la ley horaria de posición. Preste atención a las condiciones iniciales que debe tener en cuenta.