

## Capítulo 2

### Introducción al análisis gráfico

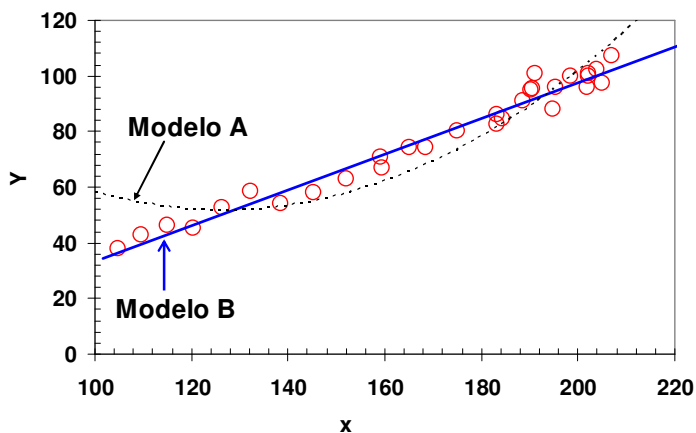
En muchos problemas se busca encontrar la dependencia entre dos variables,  $x$  e  $y$ . Para ello, se observa la variación de una,  $y$ , en función de la otra  $x$ . La variable  $x$  podría ser, por ejemplo, el estiramiento de un resorte e  $y$  la fuerza aplicada. En este capítulo se presentan algunos métodos cualitativos de análisis gráfico para la interpretación de datos experimentales y determinación de relaciones o regularidades implícitas en ellos. Se discuten los casos en que las variables están vinculadas mediante una relación lineal, potencial o exponencial, como ejemplos más sobresalientes. También se brindan algunos criterios para seleccionar las escalas más convenientes para la representación de un gráfico. Se discute la utilidad de las escalas lineales, semi-logarítmicas o doble logarítmicas, junto al procedimiento de “linealización” de representaciones gráficas.

#### Objetivos

- ✓ Representación gráfica de resultados
- ✓ Descubrimiento de una ley empírica
- ✓ Relación Lineal
- ✓ Exponencial y potencial
- ✓ Escalas lineales, y logarítmicas
- ✓ Pseudovariables

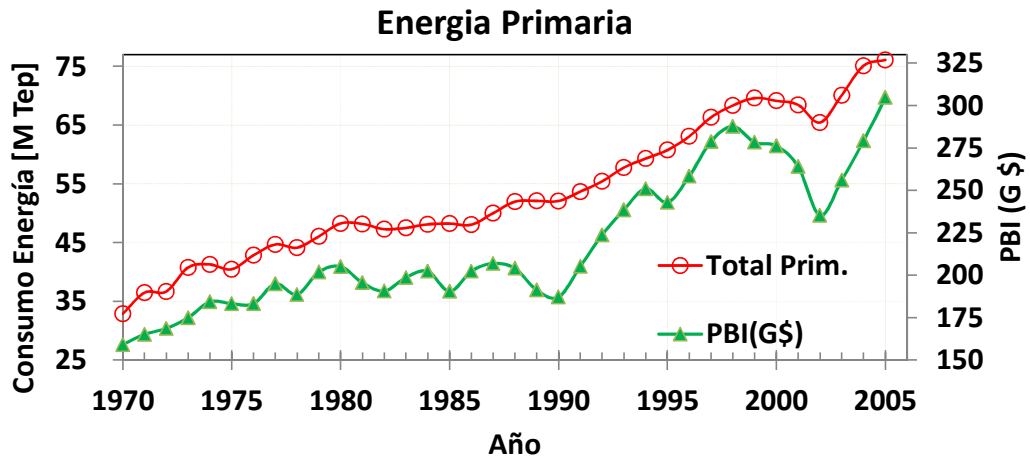
#### 2.1 Representación gráfica de resultados

Uno de los recursos más usados por los investigadores para evaluar el grado de acuerdo entre los resultados de un experimento y una teoría o modelo consiste en representar ambos conjuntos de datos, en un mismo gráfico. En la Fig. 2.1 se comparan dos modelos interpretativos de los resultados, representados por líneas continuas (llena y de puntos) con los valores medidos, mostrados con símbolos circulares. A simple vista, se observa que el modelo B brinda una mejor descripción de los datos que el modelo A. Existe un generalizado consenso en la literatura científica en utilizar símbolos para representar los resultados de un experimento u observación y líneas continuas para describir las expectativas teóricas.

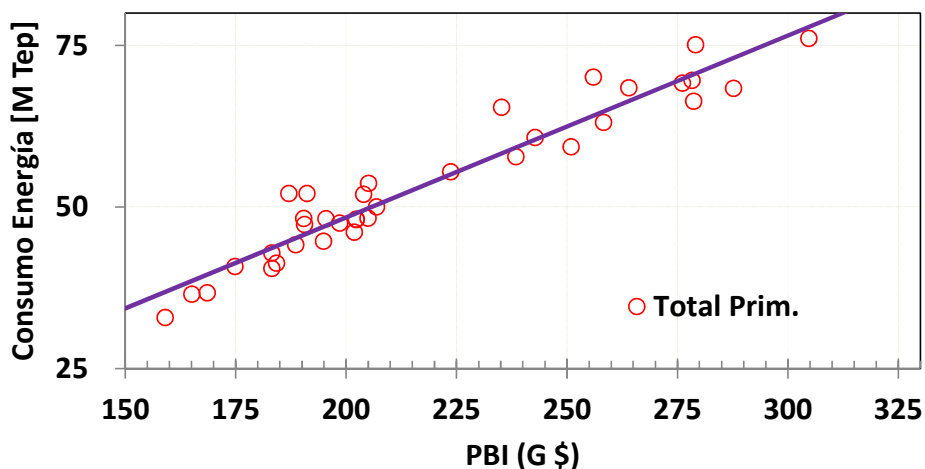


**Figura 2.1** Representación de datos de la variable  $Y$  como función de otra,  $X$ . Los símbolos circulares son los resultados observados. En el mismo gráfico se incluyen dos modelos interpretativos, el modelo A (línea de puntos) y el modelo B (línea llena).

La **representación gráfica** de los datos experimentales es en muchos casos una fuente de inspiración para interpretar los mismos o desarrollar modelos y teorías explicativas. De hecho, el análisis gráfico de resultados de la realidad es una herramienta muy usada no solo en las ciencias experimentales sino también en muchas disciplinas académicas y en diversas áreas de la vida cotidiana. En la Fig. 2.2, se muestra la variación del consumo total de Energía primaria de Argentina y su Producto Bruto Interno (PBI) como función del tiempo entre los años 1970 y 2006. La conexión o correlación entre estas variables es aparente en este grafico y nos sugiere que exploremos la dependencia entre estas variables.



**Figura 2.2** Representación del consumo de energía primaria total de la Republica Argentina como función del tiempo, círculos referidos al eje vertical izquierdo. La unidad de energía utilizada es millones de Toneladas equivalentes de petróleo, Tep. En esta figura también se representa la variación del producto bruto interno (PBI) en G\$ (Giga Pesos a valores constantes, es decir corregidos por inflación) como función del tiempo, con triángulos referidos al eje vertical derecho. Esta figura revela una vinculación entre el consumo de energía y PBI.



**Figura 2.3** Representación del consumo de energía total de la Republica Argentina como función del PBI entre los años 1970 y 2006. Esta representación gráfica revela la dependencia aproximadamente lineal entre estas variables durante ese período de tiempo.

En la figura 2.3, al representar el consumo de energía como función del PBI, la dependencia, aproximadamente lineal entre estas variables, es fácil de identificar. Esta observación nos permite desarrollar un primer modelo del consumo de energía para este país. Nótese como la representación gráfica nos conduce a “descubrir” la relación implícita en los datos observados. Esta visualización de la relación entre dos variables, rara vez es tan transparente y sugestiva en una tabla de datos. Asimismo, siempre debe mantenerse una actitud crítica hacia estas conclusiones preliminares. Pueden ocurrir situaciones que hagan que esta dependencia pueda variar en años subsiguientes. Por ejemplo, si un país se comprometiese con un programa de uso racional de la energía, podría ocurrir que el PBI siga aumentando y el consumo de energía se mantenga constante o que decreciese.

El análisis de datos es una actividad que ha tenido un gran desarrollo en los últimos tiempos dado que es aplicable a un gran número de disciplinas académicas, actividades científicas, económicas y sociales.

## 2.2 Elección de las variables

En muchas situaciones se desea investigar la variación o dependencia de un dado atributo de un sistema (que designamos como la variable  $Y$ ) como función de otra variable del mismo, que llamaremos  $X$ . Nuestro objetivo es encontrar, si la hubiese, la relación que liga la variable  $X$  con  $Y$ . Es usual denominar a las variables que controlamos o que determinan el estado del sistema como *independientes*. Las variables que están determinadas por otras, son las variables *dependientes*.<sup>1,2</sup> En el ejemplo de la Fig. 2.2, la variable independiente sería el tiempo (años), mientras que tanto el PBI como el consumo de energía serían las dependientes. Esta división no siempre es clara o posible de realizar. En muchos problemas reales, en general hay varias variables independientes y varias dependientes.

Por simplicidad, en lo que sigue supondremos que el sistema contiene solo dos variables,  $X$  la variable independiente e  $Y$  la dependiente. La importancia de este caso es que en muchas situaciones prácticas, es posible diseñar un estudio o experimento de modo tal que solo un parámetro varíe por vez, mientras los restantes permanecen constantes. Cuando esto es posible, el análisis se simplifica considerablemente.

### 2.2.1 Relación lineal

Decimos que la dependencia de  $Y$  con  $X$  es lineal, si los datos observados se pueden describir adecuadamente con una relación:

$$Y = a \cdot X + b. \quad (2.1)$$

La Fig. 2.3 muestra un ejemplo de este tipo. El parámetro  $a$  es la pendiente de la recta y  $b$  es la ordenada del origen u ordenada de la intersección de la recta con el eje vertical  $y$ . Una relación lineal entre dos variables es fácil de identificar a simple vista. Sin embargo, no es tan fácil diferenciar si las variables presentan una relación potencial, exponencial o de otro tipo.<sup>3,4</sup>

## 2.2.2 Relación potencial

Las variables  $X$  e  $Y$  presentan una dependencia potencial si:

$$Y = aX^b \quad (2.2)$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes distintas de cero. Esta forma *potencial* es muy común en las ciencias naturales, economía y muchas otras aplicaciones.

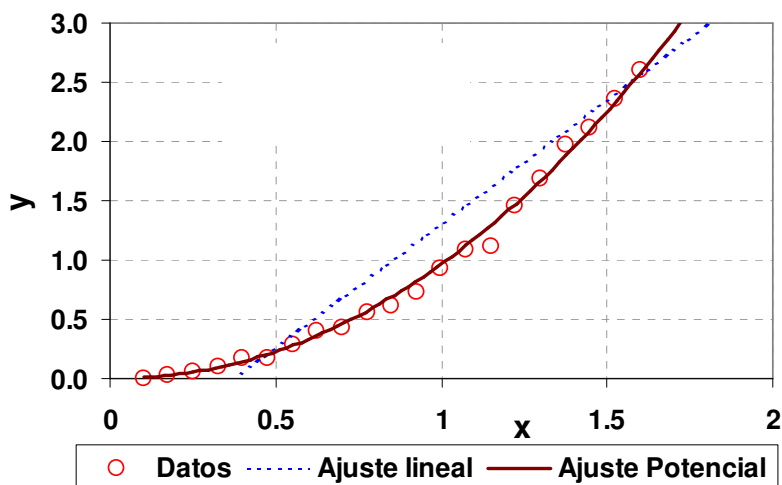
Para facilitar la tarea de encontrar tanto el exponente de escala  $b$  como la constante  $a$ , es conveniente representar  $\log(Y)$  en función de  $\log(X)$ . Si tomamos el logaritmo a ambos miembros de la Ec.2.2:

$$\log(Y) = \log(aX^b) = \log(a) + b\log(X) \quad (2.3)$$

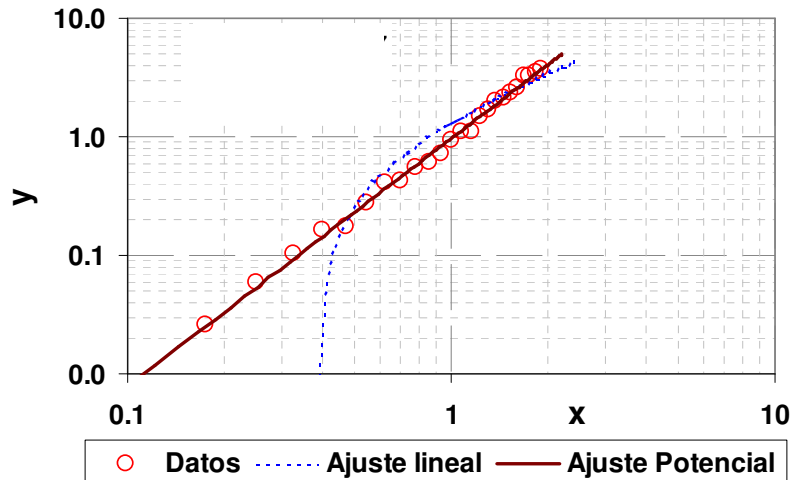
Si  $\tilde{Y} \equiv \log(Y)$  y  $\tilde{X} \equiv \log(X)$  tenemos que:

$$\tilde{Y} = \log(a) + b\tilde{X} \quad (2.4)$$

Vemos así que la representación gráfica de  $\tilde{Y}$  en función de  $\tilde{X}$ , es una recta con pendiente  $b$  y ordenada al origen  $\log(a)$ . Con la mayoría de las planillas de cálculos y paquetes matemáticos, tales como: Excel @Microsoft, Origin@Originlab, Matemática @Wolfram, Matlab@MathWorks, etc, no es necesario tomar el logaritmo de los datos, basta con elegir para los ejes escala logarítmica. Las figuras 2.4 y 2.5 ejemplifican este proceder. Cuando un gráfico no es lineal, si al cambiar las escalas de los ejes se transforma en otro que sí tiene apariencia lineal, decimos que las escalas usadas “linealizan” los datos. La Fig. 2.5 es un ejemplo de linealización.



**Figura 2.4** Representación de una serie de datos con dependencia potencial en escala lineal. La línea de puntos es un ajuste lineal a los datos, mientras que la curva continua es un ajuste potencial ( $Y = a.x^b$ ).



**Figura 2.5** Los mismos datos de la Fig. 2.4, mostrados usando escalas logarítmicas o escala log-log. Nótese que la recta, representada por la línea de puntos, en estas escalas no es más una recta, mientras que curva potencial (línea llena) se ve como una recta. Es interesante comparar cuidadosamente las mismas líneas en esta figura con la Fig.2.4.

Los *gráficos doble-logarítmicos*, como los de la Fig. 2.5, también se llaman *gráficos log-log*. Nótese que en escala logarítmica, las décadas son equidistantes, o sea la distancia entre 0.1 y 1 es igual a la que existe entre 1 y 10 y así sucesivamente. Esto es muy diferente a lo que ocurre en las escalas lineales o normales, donde la distancia entre 0 a 1 es igual a la que existe entre 1 y 2 y así sucesivamente, como se ve en las figuras 2.4 y 2.5.

Por otra parte, si sospechamos que los valores observados ( $X$ ,  $Y$ ) tienen una dependencia potencial, al representarlos en un gráfico doble-logarítmico o log-log, los datos se alinearán. Es decir si los datos se “linealizan” en escala log-log, entonces podemos inferir que la relación que los liga es potencial. De este modo el gráfico nos permite descubrir la ley subyacente que liga las variables  $X$  e  $Y$ .

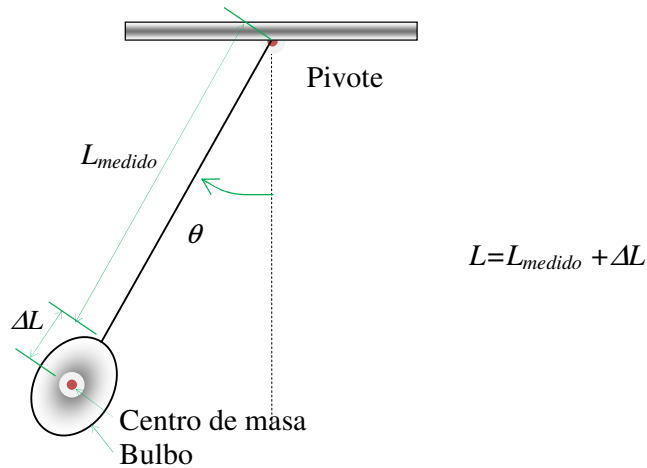
**Ejemplo:** Se mide el período  $T$  de un péndulo simple para distintas longitudes  $L$ . En el caso de pequeñas amplitudes de oscilación, usando la leyes de Newton se deduce que ambas variables están relacionadas por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (2.5)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad. En este caso  $L$  representa la distancia del punto de suspensión al centro de masa del bulbo, ver Fig.2.6. La expresión (2.5) se puede escribir como:

$$T = aL^b \quad , \quad (2.6)$$

que es potencial con  $a = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$  y  $b = \frac{1}{2}$ .



**Figura 2.6** Péndulo simple, en este caso  $L_{medido}$  es la distancia del punto de suspensión o pivote y un punto de referencia que no es el centro de masa, pero dista de él una distancia  $\Delta L$ .

De este modo, un gráfico de los resultados experimentales de  $T$  en función de  $L$ , en escala log-log, nos permite saber si la Ec.(2.6) describe bien nuestros datos o no. En caso que la respuesta fuese afirmativa, la representación grafica nos posibilita obtener las constantes  $a$  y  $b$ . El valor de  $b$  nos permite determinar el valor de la aceleración de la gravedad  $g$ . De igual modo podríamos haber graficado  $T^2$  en función de  $L$ . Es claro que en este último caso, la relación entre estas dos variables se espera que sea lineal. De su pendiente  $a^2 = 4\pi^2/g$ , se puede obtener  $g$ .

Nótese que si hubiésemos tomado  $L_{medido}$  como la distancia entre el punto de suspensión del péndulo y un punto cualquiera del péndulo, a una distancia  $\Delta L$  del centro de masa, ver Fig. 2.6; al graficar  $T^2$  en función de  $L_{medido}$  obtendríamos una recta con ordenada en el origen, del tipo  $T^2 = c \cdot L_{medido} + d$ . Del ajuste de los datos podríamos obtener tanto  $c = 4\pi^2/g$  como  $d = 4\pi^2 \Delta L/g$  y a partir de estos valores podríamos deducir tanto el valor de  $g$  como la distancia  $\Delta L$  del centro de masa del péndulo al punto original de medición elegido.

### 2.2.3 Relación exponencial

Otro caso particular de mucho interés es el de una relación exponencial entre dos variables. Para fijar ideas supongamos que estamos considerando dos variables,  $Y_1$  e  $Y_2$ , como función de  $t$ . Si las relaciones entre estas variables son:

$$Y_1(t) = Ae^{-\lambda_1 t} \quad (2.7)$$

y

$$Y_2(t) = A(1 - e^{-\lambda_2 t}) \quad (2.8)$$

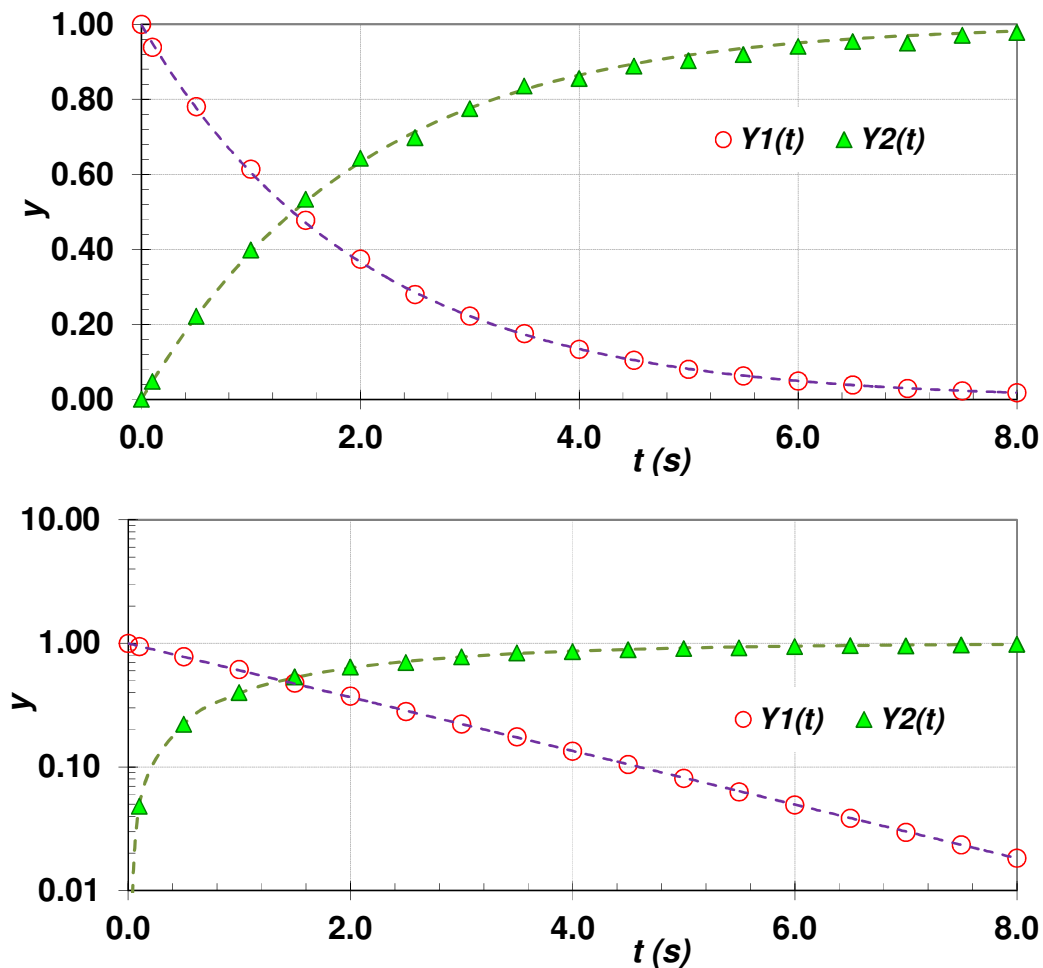
sus representaciones gráficas serán como se muestra en la Fig. 2.7.

Es fácil notar que la primera de estas relaciones ( $Y_1$ ) se “linealiza” en escala semilogarítmica pero la segunda ( $Y_2$ ) no. En este caso, es conveniente recordar que la derivada de ambas expresiones sí tiene una relación funcional simple, a saber:

$$\frac{dY_1(t)}{dt} = -A\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} = -\lambda_1 Y_1(t) \quad (2.9)$$

y

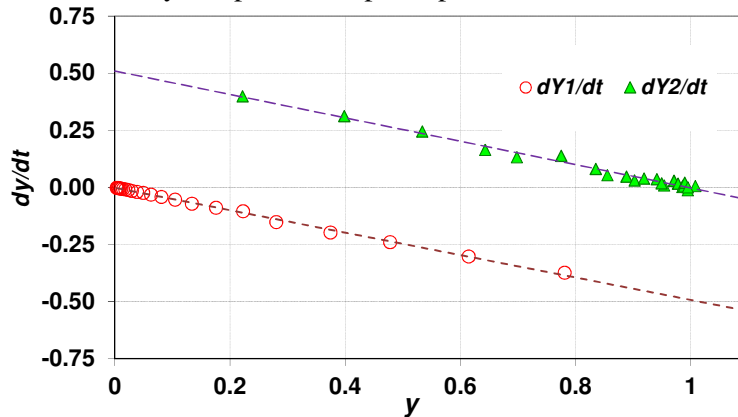
$$\frac{dY_2(t)}{dt} = A\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} = \lambda_2 (A - Y_2(t)) \quad (2.10)$$



**Figura 2.7** Representación en escala de las funciones (2.7) y (2.8) en escala lineal (panel superior) y en escala semilogarítmica (panel inferior). Nótese que solo la representación de la expresión (2.6) se linealiza en escala semilogarítmica.

Por lo tanto, usando la *derivada* ( $dY/dt$ ) en *función de la variable* dependiente ( $Y$ ) obtenemos una recta. De los valores de las pendientes y sus ordenadas al origen podemos estimar los parámetros  $A$  y  $\lambda$ , Ecs.(2.9) y (2.10). En la figura 2.8 se muestran

las mismas funciones que en la figura 2.7 usando la representación propuesta. Es claro que esta alternativa es muy útil para este tipo de problemas.



**Figura 2.8** Representación en escala lineal de las derivadas  $dY_1/dt$  y  $dY_2/dt$  en función de las variables dependientes  $Y_1$  e  $Y_2$  respectivamente. En este ejemplo,  $\lambda_1 = \lambda_2$ , por lo tanto los datos se alinean (linealizan) en dos rectas paralelas.

Una dificultad de esta representación es que requiere conocer la derivada de la función en cuestión y para hacerlo debemos usar algún procedimiento numérico. Si disponemos de mediciones de  $Y_1$  e  $Y_2$  en función de  $t$  lo que hacemos es aproximar la derivada calculando las diferencias finitas usando pares de datos consecutivos:

$$\frac{dY(t_i)}{dt} \approx \frac{Y_{i+1} - Y_i}{t_{i+1} - t_i} \quad \text{o mejor} \quad \frac{dY(t_i)}{dt} \approx \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad (2.11)$$

Sin embargo, como los datos tienen errores, la diferencia ( $Y_{i+1} - Y_i$ ) puede ser en algunos casos menor que el error de medición, y en tal caso el valor obtenido con la Ec.(2.11) presentará mucha dispersión. Una manera de mejorar la estimación de la derivada de datos experimentales consiste en usar un grupo de datos que estén en un intervalo donde *a priori* no se espere mucha variación en la derivada. Usando un grupo de valores aproximamos una recta que pase por todos ellos, cuya pendiente  $m$  tomamos como una estimación de la pendiente de la curva en el entorno de esos datos, o sea, hacemos una estimación local de la derivada  $dY/dt$  usando un grupo de valores en vez de usar pares consecutivos. Es conveniente para hacer esta operación que abscisas ( $t$ ) estén ordenadas de menor a mayor y que el grupo de datos elegidos sea un número impar, que incluya un número igual de abscisas mayores y menores en cada punto. Por ejemplo, si se toman 5 datos para obtener la pendiente, dos corresponden a datos con abscisas mayores y dos corresponden a datos con abscisas menores que el punto en cuestión. De este modo se evitan posibles sesgos en las derivadas. La función *pendiente* es una función muy común en muchas planillas de cálculo. El gráfico que hacemos finalmente es uno de *la pendiente* en función de  $Y$ . La mayoría de las hojas de cálculo usan este procedimiento para el cálculo de la derivada de una función representada por un conjunto de datos.



## 2.2.4 Transformación de variables - pseudovariables

Hay muchas formas funcionales entre variables que no se linealizan usando escalas logarítmicas, por ejemplo:

$$Y = a + b/X \quad (2.12)$$

No es posible linealizar esta función tomando escalas logarítmicas. Sin embargo, si hacemos la transformación:

$$Z = 1/X \quad \text{tenemos} \quad Y = a + b \cdot Z, \quad (2.13)$$

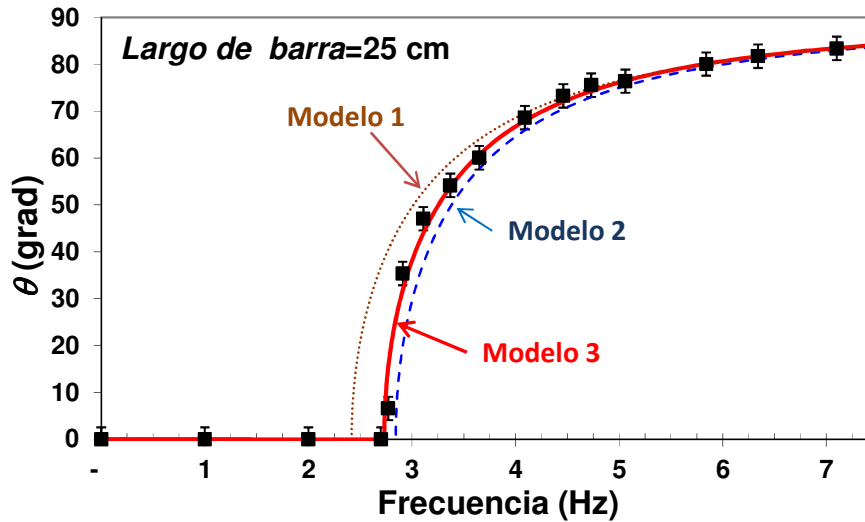
que describe una relación lineal entre  $Y$  y la nueva *pseudovariable*  $Z$ . Además, si graficamos  $Y$  en función de  $Z$ , del ajuste de los datos obtenemos los valores de los parámetros  $a$  y  $b$ .

## 2.3 Sugerencias para generar gráficos

La mayoría de las hojas de cálculo y programas de graficación disponibles en las computadoras incluyen entre sus opciones el diseño de gráficos usando los distintos tipos de escalas descritas anteriormente. Para lograr gráficos sugestivos y claros es conveniente seguir las siguientes sugerencias:

- ✓ identificación de los ejes con *rótulos* bien ubicados que indiquen qué variables se representan y qué *unidades* se están usando,
- ✓ cuando se representan *datos* que son *resultados de mediciones*, es conveniente usar *símbolos* (cuadrados, círculos, rombos, etc.), en lo posible con sus *incertidumbres o errores absolutos* (en la forma de barras que indiquen el tamaño de los errores o incertidumbre). Cuando se desea diferenciar distintas series de datos, es recomendable el uso de símbolos diferentes,
- ✓ cuando se representan *modelos* o predicciones *teóricas* es costumbre utilizar líneas continuas (sólidas, de punto, de guiones, etc.),
- ✓ incluya un epígrafe que describa brevemente lo que se está representado y que aporte alguna información adicional,
- ✓ carteles interiores al gráfico, con información complementaria relevante para entender en qué contexto se muestran los datos o sobre las condiciones experimentales particulares en las que se los obtuvo,
- ✓ seleccionar símbolos fácilmente diferenciables o distinguibles para indicar distintas series de datos. Lo mismo vale para las formas de líneas que corresponden a distintos modelos propuestos para describir el comportamiento de los datos.

En la Fig. 2.9 se ilustra este procedimiento.



**Figura 2.9** Ejemplo de gráfico y epígrafe. Los cuadrados llenos corresponden a los resultados medidos y las líneas continuas son predicciones de diferentes modelos que pretenden describir el comportamiento de los datos.

## 2.4 Resumen de conceptos importantes

Se sugiere que el lector dé una explicación concisa de los siguientes conceptos, y cuando sea posible, indique un ejemplo apropiado.

- ✓ ¿Por qué es útil graficar los datos en lugar de presentarlos en tablas?
- ✓ Explique por qué las funciones potenciales y exponenciales son linealizables.
- ✓ ¿Por qué es útil realizar cambios de escalas en los gráficos?
- ✓ ¿Qué concluye si al usar escalas semilogarítmicas una representación gráfica se linealiza?
- ✓ ¿Qué concluye si al usar escalas doble logarítmicas una representación gráfica se linealiza?
- ✓ ¿Por qué es útil usar pseudovariables?

## Referencias

(ver al final)

## Ejercicios y problemas

Es objeto de este ejercicio es desarrollar habilidad en el uso de **planillas de cálculo**. Una posibilidad es usar Excel®Microsoft aunque programas como Mathematica®Wolfram o Matlab® MathWorks, pueden ser adecuados para resolver estos ejercicios. En la página web [www.fisicarecreativa.com](http://www.fisicarecreativa.com) (*Libro Experimentos de Física*) se pueden descargar planillas Excel con la soluciones de un conjunto de ejercicios aquí planteados.

En estos ejercicios nos proponemos:

- ✓ generar funciones matemáticas de distintos tipos en una planilla de cálculo y representarlas gráficamente,
- ✓ usar gráficos para encontrar soluciones de ecuaciones algebraicas,
- ✓ representar gráficamente funciones en distintos tipos de escalas (lineales, logarítmicas u otras).

1) Usando una planilla de cálculo como Excel, genere en hojas separadas pares de valores  $(x, y)$  correspondientes a las funciones:

i.  $y = 2x+3$

ii.  $y = 2x^2+x$

iii.  $y = x+3$  y  $y=2x+3$

iv.  $y = 3x^3 - x$  y  $y = 2\exp(x) - 1$

v.  $y = 2\exp(2x)$  y  $y = 2x+2$  y  $y = 2x^{0,75}$

vi.  $y = 2\exp(2x)$  ,  $y = 2\exp(2x)+3$  y  $y = 2x+2$  , y  $y = 2x^{0,75}+2$

- a) Agrupe los pares  $(x, y)$  en columnas y realice una representación gráfica de cada función. Seleccione el dominio de la variable independiente de modo que se pueda observar claramente la forma de las funciones representadas; haga lo propio con el rango de la variable dependiente.
  - b) Para las funciones (iv), (v) y (vi) cambie la escala de los ejes de lineal a logarítmica (eje  $x$  solamente, eje  $y$  solamente, y ambos a la vez). Discuta y justifique en que casos la representación gráfica de las funciones se linealiza, al cambiar la escala de los ejes.
  - c) Para los sistemas de ecuaciones representadas por (iii) y (iv), encuentre las raíces o soluciones del sistema de ecuaciones que representan. Recuerde que las raíces de un sistema de ecuaciones son los pares  $(x,y)$  que satisfacen simultáneamente todas las ecuaciones que constituyen el sistema. Gráficamente, son las coordenadas de los puntos donde las curvas se cortan. ¿Podría encontrar las soluciones analíticamente en ambos casos (iii) y (iv)? De ser posible, compare sus resultados con los métodos gráficos. Discuta las ventajas y desventajas de cada uno de estos métodos.
- 2) Proponga el tipo de gráfico (lineal, log-log, semi-log) y las correspondientes variables o pseudovariables que permitan linealizar la representación gráfica de cada una de las siguientes funciones. Indique en cada caso el procedimiento a seguir para encontrar, a partir del gráfico, los valores de las constantes  $a$  y  $b$ .

i.  $y = ax^2 + b$

ii.  $y = ax^b$

iii.  $y = \frac{a}{x} + b$

iv.  $y^2 = ax^3 + b$

v.  $y = a \exp(-bx)$

vi.  $y = a \exp(-\frac{b}{x})$

vii.  $y = a \log(bx)$

3) Considere la expresión  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$ . Demuestre que hay dos maneras de linealizar la representación gráfica:

a) representando  $\frac{1}{y}$  en función de  $\frac{1}{x}$ ,

b) representando el producto  $xy$  en función de la suma  $x + y$ .

Indique cómo se puede obtener el valor de la constante  $a$  de cada gráfico.

4) En 1965, Gordon F. Moore, uno de los fundadores de Intel (compañía que fabrica microprocesadores de computadoras) hizo una interesante observación, que pasó a conocerse como Ley de Moore. Notó que el número de transistores que podían integrarse en un chip crecía rápidamente. Esto lo llevó a afirmar que el número de transistores por pulgada en los chips se duplicaba cada año y que la tendencia continuaría durante las siguientes décadas. Más tarde, en 1975, modificó su propia ley al afirmar que el ritmo bajaría y que la capacidad de integración se duplicaría aproximadamente cada 24 meses.

a) Sobre la base de los datos que se reproducen a continuación, analice la validez de la aseveración de Moore.

b) ¿Qué puede decir de la validez de la ley enunciada primeramente y la segunda? Discuta y argumente las razones que fundamentan sus conclusiones.

Chip	Año de lanzamiento	Nº de transistores por pulgadas cuadradas	Nº de años a partir de 1970
4004	1971	$2,28 \times 10^3$	1
8088	1979	$3,00 \times 10^4$	9
80286	1982	$1,49 \times 10^5$	12
Intel 386	1985	$2,94 \times 10^5$	15
Intel 486	1989	$1,33 \times 10^6$	19
Pentium	1993	$3,68 \times 10^6$	23
Pentium Pro	1995	$5,98 \times 10^6$	25
Pentium II	1997	$8,40 \times 10^6$	27
Pentium III	1999	$3,44 \times 10^7$	29
Pentium 4	2001	$5,07 \times 10^7$	31
Itanium	2001	$2,83 \times 10^7$	31
Pentium III	2002	$2,77 \times 10^8$	32
Itanium 215	2004	$1,34 \times 10^8$	34
Itanium 2.9	2004	$7,69 \times 10^8$	34

**Tabla 1.** Características de los chips de computadoras que produjo Intel en las últimas décadas.

- 5) Un grupo de investigadores analiza la evolución de la población mundial de los últimos cincuenta años para evaluar planes de acción para distintos organismos, tanto económicos (FMI, Banco Mundial y OMC, entre otros) como de desarrollo social y humano (UNESCO, UNICEF, OIT y OMS, entre otros). A partir de los datos suministrados por un organismo oficial se confeccionó la siguiente tabla.

Año	Población Mundial $\times 10^9$	Año	Población Mundial $\times 10^9$
1950	2,557	1980	4,453
1951	2,594	1981	4,529
1952	2,636	1982	4,608
1953	2,682	1983	4,690
1954	2,730	1984	4,770
1955	2,781	1985	4,852
1956	2,834	1986	4,935
1957	2,890	1987	5,021
1958	2,947	1988	5,108
1959	2,999	1989	5,195
1960	3,041	1990	5,283
1961	3,082	1991	5,367
1962	3,138	1992	5,451
1963	3,207	1993	5,533
1964	3,278	1994	5,613
1965	3,347	1995	5,694
1966	3,418	1996	5,773
1967	3,487	1997	5,852
1968	3,559	1998	5,930
1969	3,634	1999	6,006
1970	3,709	2000	6,082
1971	3,786	2001	6,156
1972	3,863	2002	6,230
1973	3,939	2003	6,303
1974	4,013	2004	6,377

Tabla tomada de: <http://www.census.gov/ipc/www/worldhis.html>.

- Grafique la población  $P$  como función del tiempo, y la derivada de la población,  $dP/dt$ , como función del tiempo.
- Grafique el crecimiento porcentual  $C_P$  de población como función del tiempo, es decir,  $C_P = (dP/dt)/P(t)$ . ¿Cómo varía el crecimiento como función del tiempo? Según sus resultados, ¿cómo espera que siga el crecimiento de la población mundial en los próximos 50 años?
- Encuentre la mejor función que represente tanto  $dP/dt$ , y  $P(t)$  como función del tiempo. ¿Cómo espera que evolucione la población mundial en los próximos 100 años?
- ¿Puede predecir cuántos habitantes habrá en el año 2050 y 2100? Compare sus predicciones con otras fuentes ¿Cómo explicaría sus resultados?

- 6) Suponga que trabaja para una empresa y debe hacer un informe a la casa matriz de las ganancias de la empresa desde su instalación en el país. A partir de los datos suministrados por la gerencia contable, se confeccionó la siguiente tabla:

Mes de actividad	Ganancias (en miles de pesos)	Mes de actividad	Ganancias (en miles de pesos)
1	159	31	475
4	252	34	495
7	287	37	524
10	329	40	512
13	352	43	529
16	381	46	534
19	395	49	538
22	434	52	536
25	434	55	588
28	456	58	599

- a) Encuentre la mejor función que represente los ingresos de la empresa en función del tiempo.
- b) ¿Qué representan cada uno de los parámetros de la función de ajuste elegida?
- c) ¿Puede predecir cuáles serán los ingresos de la empresa al cabo de 84 meses de su instalación? ¿Cómo haría esa predicción? ¿Es confiable ese dato? ¿Por qué?
- 7) Suponga que el gerente de una PyME debe hacer un informe al directorio de las ganancias de dicha empresa desde 1980. Para ello recurre a los datos suministrados por la gerencia contable, a partir de los cuales confecciona la siguiente tabla:

Año	Ganancias (en miles de pesos)	Año	Ganancias (en miles de pesos)
1980	190	1991	502
1981	197	1992	557
1982	209	1993	635
1983	239	1994	715
1984	250	1995	811
1985	311	1996	894
1986	317	1997	941
1987	363	1998	1149
1988	382	1999	1121
1989	441	2000	1241
1990	514		

- a) Encuentre la mejor función que represente los ingresos de la empresa en función del tiempo.
- b) ¿Qué representan cada uno de los parámetros de la función de ajuste elegida?
- c) ¿Puede predecir cuales serán los ingresos de la empresa en el año 2002? ¿Cómo haría esa predicción? ¿Es ese dato absolutamente confiable? ¿Por qué?

## Índice alfabético

	Nombre del marcador
Análisis gráfico cualitativo	analcualtitativo
Análisis gráfico	analisis
Correlación	correlacion
Diseño de gráficos	disenograficos
Escalas logarítmicas	escalalog
Función potencial	funcpotencial
Gráfico log-log	graficologlog
Ley exponencial	leyexponencial
Linealización	linealizacion
Planilla de cálculo	planilla
Pseudovariables	pseudovariables
Relación lineal	relaclineal
Transformación de variables	transfvariables
Variable dependiente	vardepend
Variable independiente	varindep

## Referencias

- 
- <sup>1</sup> D. C. Baird, *Experimentación*, 2ª ed., Prentice-Hall Hispanoamericana S.A., México, 1991.
  - <sup>2</sup> Christopher Deacon, "The importance of graphs in undergraduate physics," *Phys. Teach.* 37, 270, 1999.
  - <sup>3</sup> S. Gil y E. Rodríguez, *Física re-Creativa*, Prentice Hall, Buenos Aires 2001.  
<http://www.fisicarecreativa.com>

---

<sup>4</sup> C. E. Swartz, *Used Math for the first two years of college science*, American Association of Physics Teachers, 2<sup>a</sup> ed., 1993.