♣ Capítulo xx

♣ Mediciones indirectas

En este capítulo se introduce el concepto de medición indirecta y se presenta el problema de la propagación de incertidumbres. Se presentan técnicas de truncamiento y redondeo de los valores y resultados de mediciones. Se discuten criterios para la elección de los instrumentos más adecuados para realizar una medición con un error determinado.

Objetivos

- ✓ medición indirecta
- ✓ propagación de incertidumbres
- ✓ Truncamiento y redondeo de valores
- ✓ Elección de instrumentos
- ✓

xx.1 Introducción - Propagación de incertidumbres

Hay ciertas magnitudes que no se miden directamente, sino que se derivan de otras que sí se miden directamente. Por ejemplo, para conocer el área de un rectángulo se miden las longitudes de sus lados; o para determinar la velocidad de un vehículo se miden independientemente distancias e intervalos de tiempo. La pregunta que queremos responder aquí es cómo las incertidumbres en las magnitudes que se miden directamente *se propagarán* para contribuir a la incertidumbre de la *magnitud derivada* que se calcula usando una expresión matemática. Sólo daremos los resultados, para mayor detalle se recomienda consultar la bibliografía citada al final del capítulo.

La figura xx.1 ejemplifica el concepto de propagación de incertidumbres: la magnitud y se calcula a partir de x por la función $y=f(x)$. Por mediciones directas conocemos el mejor valor x_0 y su incertidumbre Δx, deseamos conocer el mejor valor de y y su incertidumbre Δy.

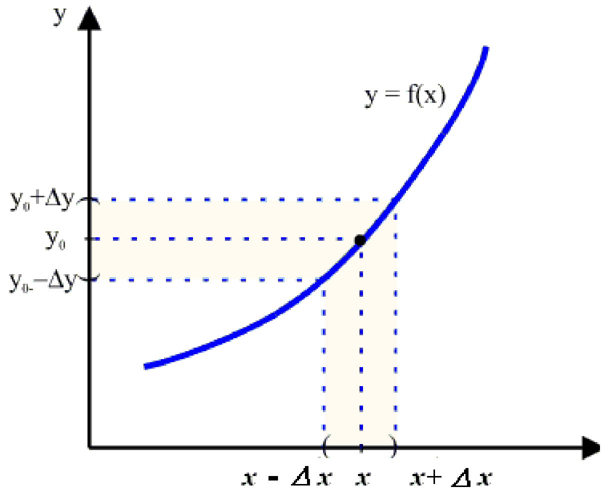

Fig. xx.1 Influencia de la incertidumbre de una magnitud *x* en la determinación de la incertidumbre de una magnitud derivada.

De los conocimientos de cálculo diferencial, podemos escribir:

$$\Delta y \approx \left| f'(x_0) \right| \cdot \Delta x = \left| \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} \cdot \Delta x \,, \tag{xx.1}$$

Si consideramos un caso más general en el que una magnitud *V* sea una función de varias magnitudes *x*, *y*, *z*, …:

$$V = V(x, y, z, \ldots) \,, \tag{xx.2}$$

donde *x*, *y*, *z*, …, son todas *independientes entre sí*, que se midieron directamente y conocemos sus mejores valores <*x*>, <*y*>, <*z*>, … y sus correspondientes incertidumbres Δx, Δy, Δz, … Se puede demostrar que la incertidumbre de *V* , ΔV, está dada por[1-3]:

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 \Delta y^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \Delta z^2 + \cdots} \quad . \tag{xx.2}$$

Esta ecuación es la *fórmula de propagación de incertidumbre*.‡ La notación $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$, … indica derivación parcial de la función *V* respecto de las variables independientes *x, y, z,*… y la fórmula se evalúa para los valores <*x*>,<*y*>,<*z*>, …

Utilizando la desigualdad:

‡ En estas primeras secciones, suponemos implícitamente que las incertidumbres de las variables *x,y, z,* … son estadísticamente independientes una de otras, es decir que no hay correlaciones entre ellas. Si las hubiese, en la Ec.(3.1) habría que incluir términos que incluyan esta correlaciones. Ver referencias [1,5] y la última sección de este capítulo.

$$(|a|+|b|)^2 = a^2 + b^2 + 2|a||b| \geq a^2 + b^2, \tag{xx.3}$$

de la expresión (xx.2) obtenemos:

$$\Delta V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 \Delta y^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \Delta z^2 + \ldots \leq \left(\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial V}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial V}{\partial z}\right|\Delta z + \ldots\right)^2, \tag{xx.4}$$

por lo tanto, un límite superior o cota superior para la incertidumbre de *V* puede escribirse como:

$$\Delta V \leq \left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial V}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial V}{\partial z}\right|\Delta z + .. \tag{xx.5}$$

En el caso especial en que la función *V(x,y,z,..)* sea factorizable[Ψ] en potencias de *x, y, z,…*, la expresión anterior puede ponerse en un modo muy simple. Supongamos que la función en cuestión sea:

$$V(x, y, z) = a\,\frac{x^n y^m}{z^l} \tag{xx.6}$$

donde *a* es una constante. La aplicación de la fórmula de propagación da:

$$\left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 = n^2 \cdot \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + m^2 \cdot \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + l^2 \cdot \left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2. \tag{xx.7}$$

Para cálculos preliminares, esta expresión puede aproximarse por:

$$\frac{\Delta V}{V} \leq n \cdot \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + m \cdot \left|\frac{\Delta y}{y}\right| + l \cdot \left|\frac{\Delta z}{z}\right|. \tag{xx.8}$$

[Ψ] Por factorizable queremos significar que la expresión de *V(x,y,z,..)* contiene las variables independiente en términos que están multiplicados, como por ejemplo la expresión (xx.6).

Otro caso particular de interés es

$$Z = x \pm y. \tag{xx.9}$$

Usando la Ec. (xx.2) obtenemos:

$$(\Delta Z)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 . \tag{xx.10}$$

Nota: En algunas ocasiones no se dispone de una función analítica que expresa la variable dependiente y como función de la independiente que suponemos se mide. Para ser más especifico, supongamos que deseamos determinar la masa, *m*, de una esfera de acrílico, cuya densidad, ρ, depende de la temperatura, *T*, de uno modo no conocido, pero que disponemos de una tabla de ρ como función de *T*. El diámetro, *d*, de la esfera se mide en forma directa, de modo que suponemos conocidos *d* y Δd. Como:

$$m(\rho, d) = \frac{\pi}{6} d^3 \cdot \rho(T), \tag{xx.11}$$

De la Ec.(xx.7) tenemos:

$$\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 = \left(\frac{\Delta \pi}{\pi}\right)^2 + 3^2 \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)^2 . \tag{xx.12}$$

El problema es que desconocemos la función $\rho(T)$, por lo tanto no podemos estimar $\Delta\rho$ a partir de ΔT. Lo que si sabemos es T_0 y su error ΔT. A partir de la tabla de ρ como función de *T*, podemos obtener $\rho(T_0)$ y también $\rho(T_1)$ y $\rho(T_2)$, siendo $T_1 = T_0 - \Delta T$ y $T_2 = T_0 + \Delta T$, por lo tanto $\Delta\rho = |\rho(T_1) - \rho(T_2)|$. De este modo, usando la Ec.(xx.12) podemos determinar la incertidumbre en la masa de la esfera en estudio.

xx.2 Truncamiento de números

Consideremos el siguiente ejemplo: se desea determinar la densidad de un cuerpo y para ello se procede a medir su volumen, $V = (3.5 \pm 0.2)$ cm^3 (con $\varepsilon_V\% = 6\%$), y su masa $m = (22.7 \pm 0.1)$ g (con $\varepsilon_m\% = 0.4\%$). Usando la definición de densidad, tenemos: $\rho = m / V$. Si realizamos este cociente con una calculadora o computadora es posible que el resultado tenga 10 o más cifras, por ejemplo:

$$\rho = 22.7 / 3.5 = 6.485714286 \ \ \text{g} / \text{cm}^3. \qquad \text{(xx.13)}$$

La cuestión es saber donde cortamos las cifras obtenidas, ya que posiblemente la mayoría de ellas sean no significativas. Para responder esta pregunta procedemos a propagar, usando la fórmula de la densidad, los errores en las variables m y V, en el valor de ρ. Utilizando la Ec.(xx.7) tenemos:

$$\Delta\rho/\rho \approx 0.06 \ \text{ y } \ \Delta\rho \approx 0.4 \text{ g/cm}^3, \qquad \text{(xx.14)}$$

Por lo tanto, en la expresión (xx.13), la única cifra significativa en la densidad de objeto, es la primera a la derecha del punto decimal, o sea el resultado de la Ec.(xx.12) será

$$\rho = (6.5 \pm 0.4) \text{ g/cm}^3 \quad \text{y} \quad \varepsilon_\rho\% = 6\%. \qquad \text{(xx.15)}$$

Es importante tener en cuenta este criterio de truncamiento toda vez que realizamos una operación usando una calculadora o computadora.

---

xx.3 Elección de los instrumentos

Un aspecto importante a tener en cuenta, antes de proceder a realizar una medición, es la elección de los instrumentos más apropiados para medir con la tolerancia o error requerido. Ignorar este paso puede acarrear importantes pérdidas de trabajo, tiempo y dinero. Imaginemos que fabricamos cilindros para un motor a explosión. Si nos excedemos en el error requerido, seguramente se dilapidó esfuerzo y recursos innecesariamente, ya que demasiados cilindros caerían fuera del margen preestablecido y no serían aceptables. Por otra parte, si se realizó la medición con mucho menos error que el requerido, la medición podría ser aceptable, pero el costo de producción de los cilindros podría ser tanto mayor, que no podrían venderse. Por lo tanto debemos determinar a priori cuales son los instrumentos más adecuados para realizar esta medición.

Para ver cómo operar frente a la elección de instrumental, supongamos que nuestro problema es determinar con una precisión del 1% el volumen de un alambre, cuyo diámetro es $d \approx 3$ mm y su longitud $L \approx 50$ cm. ¿Qué instrumentos debemos usar para lograr nuestro objetivo con el menor costo?

Lo que debemos lograr es $\Delta V/V \approx 0.01$. Como $V = \pi . d^2 L/4$, tenemos que:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{\Delta \pi}{\pi} + 2\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta L}{L}$$
$$0.01 \approx 0.001 + 0.006 + 0.002 \qquad \text{(xx.16)}$$

La primera expresión es una aplicación de la Ec. (xx.8), siendo esta aproximación útil y suficiente para este análisis preliminar. La asignación de valores de la segunda línea es en cierto modo arbitraria, pero hemos respetado que la incertidumbre relativa en el volumen V no supere el 1% requerido. Al número π le asignamos una incertidumbre relativa pequeña, y con esto determinaremos con cuántas cifras usaremos π sin que el error de truncamiento de π afecte significativamente la medición. Nótese que la calidad de la medición del diámetro tiene mayor incidencia (su incertidumbre relativa está multiplicada por 2) que la de la longitud L y esto es porque el volumen es proporcional a d^2 y solo proporcional a L a la primera potencia. Por esta razón hemos asignado menor tolerancia (más error) a la medición de d que a la medición de L. Con esta asignación preliminar decidimos cuáles instrumentos son los más adecuados para realizar el experimento (en general, los más adecuados son los que hacen la medición más fácil, en menor tiempo, con el menor costo y que cumplan los requisitos exigidos).

Como

$$\frac{\Delta d}{d} \approx 0.003 \Rightarrow \quad \Delta d \approx 0.003 \cdot d = 0.003 \cdot 3\,\text{mm} \approx 0.009\,\text{mm} \approx 0.01\,\text{mm}\,, \qquad \text{(xx.17)}$$

debemos usar, cuanto menos, un tornillo micrométrico para medir d.

De manera similar tenemos para la medición de L:

$$\frac{\Delta L}{L} \approx 0.002 \Rightarrow \quad \Delta L \approx 0.002 \cdot L = 0.002 \cdot 50\,\text{cm} \approx 1\,\text{mm}\,, \qquad \text{(xx.18)}$$

por lo que una regla común graduada en milímetros será suficiente para medir L.

Para π tenemos:

$$\frac{\Delta\pi}{\pi} \approx 0.001 \Rightarrow \quad \Delta\pi \approx 0.001 \cdot \pi = 0.001 \cdot 3 \approx 0.003 \,, \quad \text{(xx.19)}$$

que indica que debemos usar π con 3 o más cifras decimales para que el error de truncamiento tenga una incidencia despreciable. Por lo tanto, la elección π = 3.142 sería adecuada en el presente caso.

Nótese que hasta ahora todo es preliminar y solo hemos elegido los instrumentos a medir. Luego de esta elección, llevamos a cabo las mediciones usando estos instrumentos y procedemos a realizar la medición de *d* y *L*. Nótese también que para elegir los instrumentos a usar debemos conocer el valor aproximado de los valores a medir, lo que parecería una paradoja. No obstante, para este análisis preliminar solo es necesario tener una idea de los órdenes de magnitud y no un valor exacto. Este orden de magnitud se puede obtener por una inspección visual o una medición rápida. Finalmente, una vez que realicemos las mediciones de *d* y *L* debemos usar la fórmula correcta de propagación de la Ec.(xx.2) para calcular la incertidumbre combinada *ΔV*.

xx.4 ♣♣Propagación de incertidumbres con variable correlacionadas

Hasta aquí hemos supuesto que el conjunto de las variables que se miden directamente y que determinan el valor de otra, z, a la que deseamos estimar su incertidumbre, son independientes entre sí y no hay correlación entre ellas. Sin embargo, hay muchos casos en que estas suposiciones no se cumplen y la correlación entre las variables no puede soslayarse.[1,5] Para ver esto supongamos que deseamos conocer el mejor valor la incertidumbre de una variable *z*:

$$z = z(u, v) \,, \quad \text{(xx.20)}$$

que no medimos directamente, sino que calculamos a partir de las mediciones de *u* y *v*. Consideremos el caso en que las variables *u* y *v* no son independientes. Si hiciésemos una larga serie de mediciones simultáneas de *u* y *v*, obtendríamos una serie de *N* datos $\{u_i, v_i\}$. Definimos las cantidades:

$$\bar{u} \equiv < u > = \frac{\sum_i u_i}{N} \,, \qquad \bar{v} \equiv < v > = \frac{\sum_i v_i}{N} \,, \quad \text{(xx.21)}$$

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum_i (u_i - \bar{u})^2}{N} = < u^2 > - < u >^2 \,, \qquad \sigma_v^2 = \frac{\sum_i (v_i - \bar{v})^2}{N} = < v^2 > - < v >^2 \,, \quad \text{(xx.22)}$$

y

$$\sigma_{uv} = \frac{\sum_i (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{N} = <uv> - <u><v> . \qquad \text{(xx.23)}$$

Las definiciones de valores medios y variancias tienen el significado usual, discutido en el capitulo anterior[§]. La covarianza de *u* y *v*, σ_{uv} , es una medida de la correlación entre las variables.

Cuando hay correlación entre las variables *u* y *v*, la expresión que (xx.2) puede generalizarse:[1,5]

$$\Delta z^2 \equiv \sigma_z^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \cdot \sigma_u^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \cdot \sigma_v^2 + 2 \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}\right) \cdot \sigma_{uv} . \qquad \text{(xx.24)}$$

Si las variables *u* y *v* fuesen realmente independientes una de la otra, es claro que los signos de ($u_i - \bar{u}$) y ($v_i - \bar{v}$) ocurrirían al azar y el valor de la covarianza sería $\sigma_{uv} = 0$; en este caso, la expresión (xx.24) se reduce a la (xx.2).

Por otro lado, si existiese una relación entre estas variables, por ejemplo si fuese:

$$v = c \cdot u + K , \qquad \rightarrow \quad <v> = c \cdot <u> + K , \qquad \text{(xx.25)}$$

usando la Ec.(xx.22) obtenemos:

$$\sigma_{uv} = <uv> - <u><v> = c<uu> + K<u> - c<u>^2 - K<u>, \text{ o bien}$$

$$\sigma_{uv} = c\sigma_u^2 . \qquad \text{(xx.26)}$$

El problema en muchas aplicaciones prácticas es que, en general, no se conoce la expresión del coeficiente de correlación o covarianza entre las variables usadas. Sin embargo, aun en estos casos puede lograrse una cota superior para la incertidumbre de *z*. Según la desigualdad de Schwartz, se tiene:

$$<uv>^2 \;\; \le \;\; <u^2><v^2> , \qquad \text{(xx.27)}$$

§ En esta sección consideraremos sólo la componente estadística de las incertidumbres en las variables medidas. Además, suponemos muestras grandes que nos permitan soslayar la diferencia entre *N* y *N*-1 en las expresiones de las varianza y covarianzas de las muestras.

por lo tanto:

$$0 \le |\sigma_{uv}| \le \sigma_u \cdot \sigma_v \ . \qquad \text{(xx.28)}$$

Vemos que, en general, es posible obtener una límite superior para la magnitud de la incertidumbre de z, dada por:[5]

$$|\Delta z| \equiv |\sigma_z| \le \left|\frac{\partial z}{\partial u}\right| \cdot \sigma_u + \left|\frac{\partial z}{\partial v}\right| \cdot \sigma_v \ , \qquad \text{(xx.29)}$$

que coincide con la expresión aproximada (xx.5) y vale tanto para el caso en el que exista o no correlación entre las variables que se miden directamente. Cuando la correlación puede estimarse se debe usar la expresión (xx.24) para propagar las incertidumbres.

xx.5 Resumen de conceptos importantes

Se sugiere que el lector de una explicación concisa de los siguientes conceptos y, cuando sea posible, indique un ejemplo de cada uno de los casos que se citan a continuación.

- ✓ ¿Qué es una medición indirecta? Analice el concepto de propagación de errores.
- ✓ Explique cómo se realiza el truncamiento de números.
- ✓ Discuta los criterios que se usan para la elección de instrumentos cuando se quiere medir una magnitud con un error determinado.

Referencias

[1] P. Bevington and D. K. Robinson, *Data reduction and error analysis for the physical sciences*, 2nd ed. (McGraw Hill, New York, 1993).

Guide to the expression of uncertainty in measurement, 1st ed., International Organization of Standarization (ISO), Suiza (1993): http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty/index.html.

[2] Uncertainty of measurement - Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM:1995) ISO/IEC Uncertainty of measurement -- Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM:1995) http://www.iso.org/iso/iso_catalogue/catalogue_ics/catalogue_detail_ics.htm?csnumber=50461

[3] Servicio Argentino de Calibración y Medición, Instituto Nacional de Tecnología Industrial (INTI), Argentina, http://www.inti.gov.ar/sac/pdf/incertidumbres.pdf.

[4] J. Taylor, "Simple examples of correlations in error propagation", *Am. J. Phys*. 53, 663-667 (1985)

Ejercicios y problemas

1) El diámetro de una esfera resultó d = (99.1 ± 0.8) cm. Calcule la superficie y el volumen de la esfera y obtenga sus respectivos errores absolutos y relativos.

    i) ¿Cuáles de todas las determinaciones tiene "mejor calidad"?

    ii) Explique por qué la calidad de todas estas determinaciones no es la misma, si al fin de cuentas todas parten de un mismo y único dato, el diámetro.

    iii) Exprese correctamente el valor del volumen y el área de la esfera, indicando los mejores valores y sus correspondientes errores absolutos y relativos.

2) Se miden los lados a y b de un rectángulo: a = (23.45 ± 0.02) m y b = (11.40 ± 0.03) m. Calcule el perímetro y el área del rectángulo y exprese los resultados con sus respectivas incertidumbres.

3) Imagine que desea determinar el volumen de la mina de un lápiz, separada del lápiz. Determine los instrumentos que necesita para medir el volumen de la mina con un error relativo del 2%. ¿Cuántas cifras decimales toma para π?

4) Se desea conocer la densidad de una esfera de goma de unos 5 cm de diámetro aproximadamente con un error menor que el 5%. Indique la precisión de los instrumentos que se necesitan usar (incluyendo la balanza). La goma tiene una densidad de aproximadamente 1.5 g/cm^3.

5) Se desea conocer la superficie de una esfera y para ello se mide varias veces el diámetro d con un calibre. Se obtiene:

								Desviación estándar
d (mm)	51,1	52,1	53,2	52,4	53,2		52,4	0,87

a) Indique con su mejor criterio cuál es el error de apreciación del instrumento usado para medir este diámetro. Se supone que todas las cifras decimales indicadas en la tabla, son los resultados de la medición.

b) ¿Cuál es el error nominal de cada una de estas mediciones?

c) ¿Cuál es el mejor valor de cada una de estas magnitudes?

d) Analice si el número de mediciones de *d* son adecuadas, ¿cuál el número óptimo de mediciones de *d*? (Ver Cap. 2)

e) ¿Cuáles son los errores absoluto y relativo de *d*?

f) ¿Cuantas cifras decimales debería tomar para π en el cálculo de la superficie?

g) Determine el mejor valor de la superficie, su error absoluto y su error relativo.

6) Se midieron las aristas de un prisma y se obtuvieron los siguientes resultados:

	a (cm)	**b (cm)**	**c (cm)**
	4,8	11,1	21,7
	4,4	8,2	20,6
	5,1	12,7	22,3
	5,6	15,8	23,4
	5,6	15,6	23,3
	5,9	17,2	23,9
			19,6
			21,7
			23,2
			20,8
			21,2
			20,1
			20,9
Promedio (cm)	**5,240**	**13,437**	**21,628**
Desviación estándar (cm)	**0,57**	**3,41**	**1,40**

Error nominal (cm)	**0,1**	**1**	**0,10**

a) Indique en cada caso si se dispone del número adecuado de mediciones; en caso contrario indique las que serían necesarias,

b) Calcule el mejor valor del volumen y su error absoluto,

7) Para obtener la viscosidad η de un líquido se realiza el siguiente experimento, Se mide el caudal Q de salida del líquido por un tubo horizontal de largo L y radio interno R, cuando la diferencia de presión en los extremos del tubo es ΔP; el caudal cumple con la ley de Hagen-Poiseuille:

$$Q = \frac{\Delta P \pi R^4}{8 \eta L},$$

Obtenga la viscosidad del líquido si se mide Q = 500 ± 2 cm^3/s cuando la diferencia de presión es ΔP = 123 ± 1 N/m^2, en un tubo con L = 80,5 ± 0,1 cm y R = 1000 ± 1 mm, A) Use la fórmula de propagación para obtener la incertidumbre de Q, B) Compare los errores relativos de las distintas cantidades que se deben medir para obtener η, ¿Cuál de todas estas cantidades es más crítica o puede afectar el error en le determinación de η y por qué?

8) La deflexión d de una viga en voladizo de sección rectangular (lados a y b) depende de su peso P, su largo L y del módulo de elasticidad Y:

$$d = \frac{4PL^3}{Yab^3},$$

de modo que el módulo de elasticidad puede obtenerse mediante un experimento simple en el laboratorio, ¿Cuánto vale el módulo Y de un cierto material si se mide una deflexión d = (2,00 ± 0,01) mm en una viga de dimensiones a = (12,40 ± 0,02) mm, b = (24,20 ± 0,01) mm, L = (50,00 ± 0,01) cm y de peso P = (12,67 ± 0,05) N? Use la fórmula de propagación para obtener la incertidumbre de Y,

Índice alfabético

Marcadores	Nombre Marcador
propagación de incertidumbres	propagacion

covarianza	covarianza
elección de los instrumentos	elecccion
truncamiento	trunca