Capítulo xx

Tratamiento estadístico de datos

El objetivo de este capítulo es discutir el tratamiento estadístico de datos experimentales. Revisar la noción de distribución estadística de una variable aleatoria y técnicas de elaboración de un histograma. Para ello se describen los parámetros estadísticos que caracterizan una población y una muestra. También se tratar el error de una magnitud que se mide *N* veces, y el concepto de mejor valor e incertidumbre estadística. Se plantea el problema del número óptimo de mediciones a hacer en un dado proceso de medición. Por último, se indica una manera de combinar mediciones independientes de un mismo mesurando y se discute la idea de discrepancia entre dos o más mediciones.

Objetivos

- ✓ Histogramas y distribución estadística Análisis gráfico
- ✓ Parámetros de localización de una distribución: media, mediana, moda.
- ✓ Parámetros de dispersión: desviación estándar
- ✓ Distribución normal
- ✓ Magnitud que se mide N veces
- ✓ Número óptimo de mediciones
- ✓ Combinación de mediciones independientes, discrepancia

Introducción

La estadística es una ciencia, basada en la matemática, cuyo objetivo es la recolección e interpretación de datos, resultados de un experimento o análisis de una muestra o población. Una de sus metas es aprender algo acerca de un grupo completo o *población*, examinando los datos de un subconjunto de sus miembros, llamada *muestra*. Otro objetivo de la estadística es determinar si existen regularidades en fenómenos aleatorios. La estadística es una herramienta muy útil para el análisis de datos obtenidos en un proceso de medición, en particular cuando se llevan a acabo mediciones repetidas de un mismo mesurando.

Histogramas y distribución estadística

Consideremos una población de personas de una ciudad. Queremos analizar cómo se distribuyen las estaturas de sus habitantes. Para llevar adelante este estudio podemos medir la altura de todos los individuos de la *población* o bien tomar una *muestra representativa* de la misma a partir de la cual inferiríamos las características de la población.[1],[2]

Esta clase de estudio es un típico problema de estadística. Si tomamos una muestra de tamaño *N* y para ésta medimos la altura de cada individuo, este experimento dará *N* resultados: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$. Todos estos datos estarán comprendidos en un intervalo de alturas (x_{min}, x_{max}) entre la menor y mayor altura medida.

Una manera útil de visualizar las características de este conjunto de datos consiste en dividir el intervalo (x_{min}, x_{max}) en m $(< N)$ subintervalos delimitados por los puntos $(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m)$; a estos subintervalos los llamaremos el *rango de clases*. Seguidamente, contamos el número n_1 de individuos de la muestra cuyas alturas están en el primer intervalo $[y_1, y_2)$, el número n_j de los individuos de la muestra que están en el j-ésimo intervalo $[y_{j-1}, y_j)$, etc., hasta el m-ésimo subintervalo. Aquí hemos usado la notación usual de corchetes, […], para indicar un intervalo cerrado (incluye al extremo) y paréntesis comunes, (…), para denotar un intervalo abierto (excluye el extremo).

Con estos valores definimos la función de distribución f_j que se define para cada subintervalo como:

$$f_j = \frac{n_j}{\sum_j n_j} = \frac{n_j}{N} \qquad \text{(xx.1)}$$

Esta función de distribución está normalizada, es decir:

$$\sum_{j=1}^{m} f_j = 1 \qquad \text{(xx.2)}$$

El gráfico de f_j en función de z_j $[z_j = (y_{j-1} + y_j)/2]$ nos da una clara idea de cómo se distribuyen las alturas de los individuos de la muestra en estudio. Este tipo de gráfico se llama un *histograma* y la mayoría de las hojas de cálculo de programas comerciales (Excel®Microsoft, Origin®OriginLab, etc.) tienen herramientas para realizar las operaciones descriptas y el gráfico resultante. En la Fig. xx.1 ilustramos dos histogramas típicos.

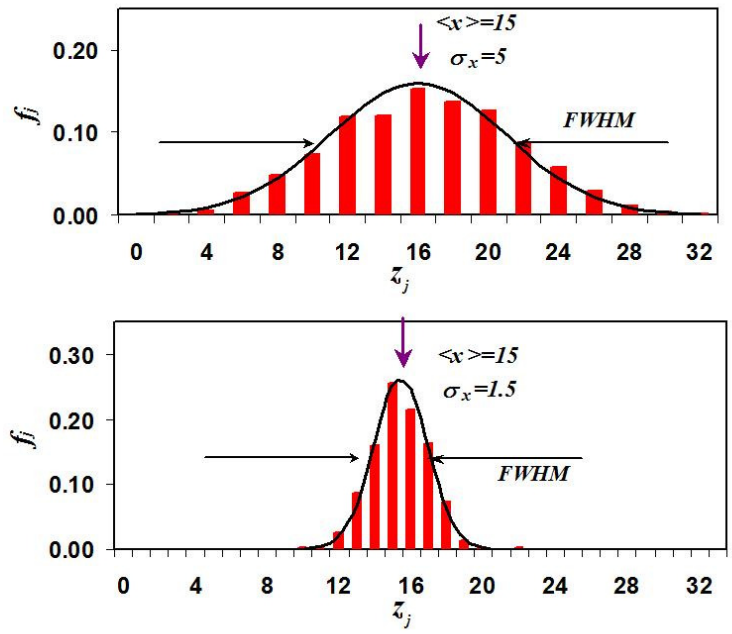

Figura xx.1. Histograma de dos muestras con igual valor medio pero con distintos grados de dispersión. En este ejemplo, los datos tienen una distribución gaussiana o normal, descripta por la curva de trazo continuo.

La función que caracteriza una distribución se la designa como f_i si la distribución es discreta. Es decir si la variable en estudio solo puede tomar valor discretos, como por ejemplo los resultados de una tirada de dados. Si los resultados posibles x de un experimento forman un continuo, como por ejemplo los resultados de la medición de una longitud o un voltaje, la función de distribución se describe por una función $f(x)$. La variable x, que describe los resultados posibles de experimento, se denomina variable aleatoria. Si los resultados son discretos, la variable aleatoria es discreta y si los resultados forman un continuo, la variable aleatoria es continua.

Tres parámetros importantes de una población son:[1,2]

- El valor medio: $m = \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot f_j = \frac{1}{N_{Pobalción}} \cdot \sum_{i=1}^{N_{Población}} x_i = \int_x x \cdot f(x) dx$ (xx.3)

  Este parámetro da una idea de la localización del centro de masa de la distribución. El valor medio corresponde al "centro de gravedad" o centroide de la distribución.

- La varianza: $Var(x) = \sigma_x^2 = \frac{\sum_{j=población} (x_j - m)^2}{N_{Poblacion}} = \int_x (x-m)^2 f(x) dx$ (xx.4)

  Aquí $N_{población}$ y las sumas se refieren a todos los individuos de la población. Si la variable aleatoria es continua, se usa la integral, y si es discreta se realiza la suma; $f(x)$ o f_j son las correspondientes distribuciones asociadas a la población.

- La desviación estándar: $\sigma_x = \sqrt{Var(x)}$ (xx.5)

  La desviación estándar σ_x y la varianza, son parámetros que caracterizan la dispersión de los datos alrededor del promedio. Cuando más concentrada esté la distribución de valores alrededor de m, menor será σ_x, y viceversa.

Dado que en general desconocemos los datos sobre la población, debemos inferir sus valores a partir de información de una muestra. El valor medio de una muestra (también llamado media y promedio) se designa usualmente por los siguientes símbolos: $<x>$, $\bar{x}$. La *media* o *promedio* de una muestra se define como:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i \Big/ N \,. \qquad \text{(xx.6)}$$

El valor medio dado por (xx.3) se denomina frecuentemente media poblacional y la media dada por (xx.6) media muestral. En general el valor medio muestral es un muy buen estimador de la media poblacional.[1,2]

Si se usa una muestra para estimar el valor de la varianza o de la desviación estándar, un buen estimador de este parámetro es:[1,2]

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=muestra}(x_i - \bar{x})^2}{(N_{muestra} - 1)} . \qquad (xx.7)$$

Nótese la diferencia entre el denominador de las expresiones (xx.4) y (xx.7). Es claro que si la muestra es grande esta diferencia es poco significativa, pero en general es importante distinguir si se está calculado la varianza (o desviación estándar) de una muestra o de una población. En general, en este capítulo referido a mediciones de un mesurando, suponemos que la población (número total de mediciones posibles) es infinita. Por lo tanto, obtenemos estimadores de estos parámetros a partir de una muestra de mediciones.

Parámetros de localización de una distribución

Los parámetros usuales con los que puede caracterizarse la localización de una distribución son:[1]

a) la media
b) la mediana
c) la moda

La *mediana* es el valor de la variable (aleatoria) que separa los datos en dos mitades iguales: aquellos que son menores y mayores que este valor. O sea que la mitad de los datos de la población o muestra están a derecha de la mediana y la otra mitad están a la izquierda de la misma.

La *moda* corresponde al valor de la variable (aleatoria) donde la distribución es máxima. En un histograma o distribución la moda corresponde al valor de la variable donde hay un pico o máximo. Si una distribución tiene dos máximos la denominamos distribución bimodal, si tiene tres máximos trimodal y así sucesivamente.

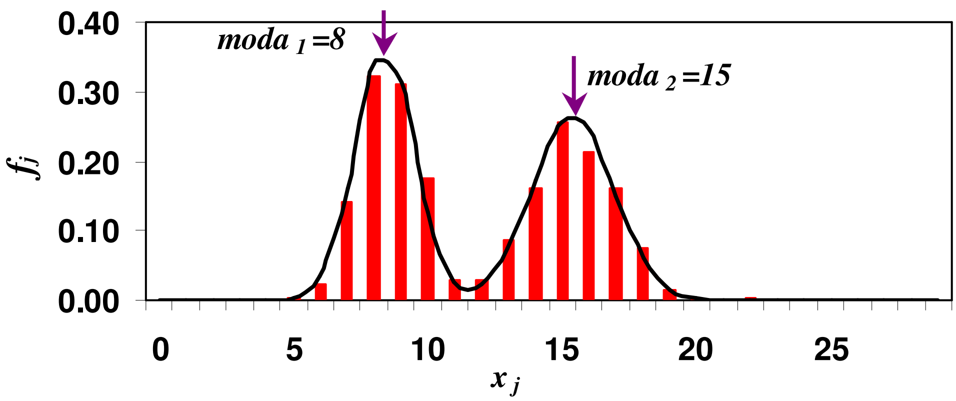

Figura xx.2. Histograma que muestra la distribución de masa una población de animales. Este es un ejemplo de distribución bimodal. Claramente se observan dos picos o máximos (modas) en esta distribución.

Para estimar la mediana de una muestra tenemos que observar la lista de datos ordenados de menor a mayor, y ubicar el valor central de la lista. Si el número de datos es impar, la mediana corresponde precisamente al valor central. Si el número N de datos es par, la mediana se estima como ½ ($X_{N/2}$ + $X_{N/2+1}$). En una distribución dada, una línea vertical trazada desde la mediana divide a la distribución en dos partes de área equivalentes.

Media, moda y mediana no tienen, en general, porqué coincidir. Estos tres parámetros sí son iguales en el caso de distribuciones unimodales y simétricas respecto del valor medio. Este es el caso de una distribución gaussiana como e ilustrado en la figura xx.1. En el caso de una distribución asimétrica, las diferencias entre moda, media y mediana pueden ser sustanciales, como se ilustra en el caso de la Fig.xx.3

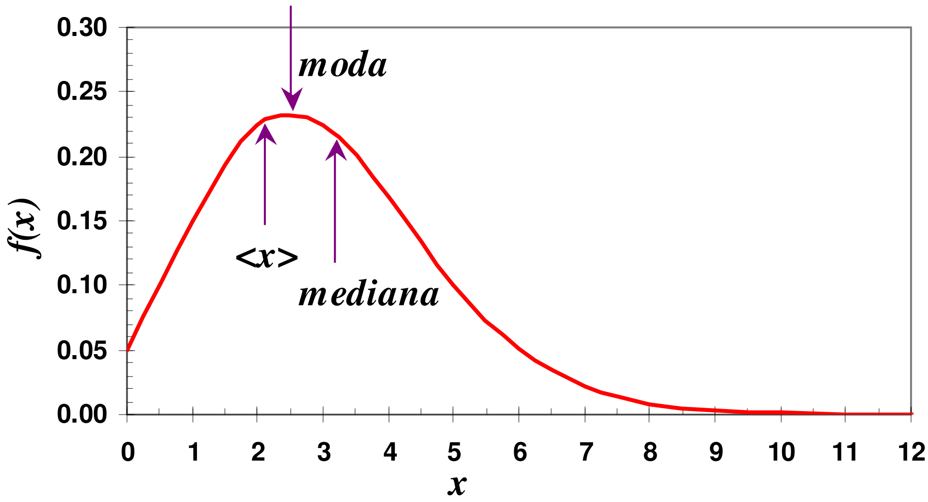

Figura xx.3. Ejemplo de distribución asimétrica unimodal. Nótese que aquí la moda, la mediana y la media (promedio) no coinciden a diferencia de lo que ocurre en una distribución simétrica como las de la figura xx.1

Es importante saber cuál parámetro de localización es más apropiado de usar o más representativo en una dada situación. Consideremos, para fijar ideas, la distribución del ingreso familiar en un país dado. La presencia de millonarios, aunque sean relativamente pocos, tiene un efecto sobre la media que contrarresta a muchos miembros de la población en el extremo inferior de la escala de salarios. De esta manera, la moda y la media difieren sustancialmente. En este caso tal vez la moda es un parámetro más representativo que la media. A menudo los datos estadísticos pueden ser interpretados de diversas maneras. El siguiente ejemplo ilustra las distintas interpretaciones que pueden extraerse de un conjunto de datos estadísticos.

Ejemplo 1. Una pequeña empresa analiza la necesidad de discutir los salarios. El cuadro de sueldos es el siguiente:

Director	\$15000
Gerente	\$10000
Jefe de sección	\$ 3000
7 Obreros	\$1000 c/u

Los empresarios argumentan que se debe discutir el salario en base a sus valor medio. El delegado gremial sostiene se debe discutir el salario en base a la mediana.

En este ejemplo, el salario promedio es \$3500. La moda (salario más probable) es \$1000. La mediana es también \$1000. Si el Director y Gerente se duplicaran el sueldo, dejando fijo el sueldo de los obreros, el promedio sería esta vez: \$6000, mientras que la moda y mediana no cambiaría. Por otro lado, si se diese un aumento fijo a todo el personal de \$500, la media sería: \$4000 y a moda y mediana serían \$1500, el sueldo de los obreros aumentaría en 50%. Es claro entonces los puntos de vista que sostiene cada parte.

Parámetros estadísticos de dispersión- desviación estándar

Cuando analizamos datos estadísticos, es frecuente referirse a una población o a una muestra de ella. Es importante diferenciar, cuando calculamos estos parámetros, si los mismos se refieren a una muestra o a una población.

La desviación estándar σ, indica como se distribuyen los individuos de una población relativa al valor medio m. En la teoría estadística se demuestra[1,2] que las media muestral (xx.6) es un buen estimador de la media poblacional (xx.3). De igual modo la desviación estándar muestral S_x (xx.7) es un buen estimado de la desviación estándar poblacional σ dada por (xx.4).

Cuando realizamos N mediciones de un mesurando, podemos suponer que estamos extrayendo una muestra de tamaño N, de una población de tamaño infinito, es decir de todas las mediciones que en principio podríamos realizar. Con estas N mediciones tratamos de estimar los valores medio y desviación estándar poblacional de todas la mediciones posibles, que no realizaremos.

Distribución Normal o Gaussiana: Una distribución de probabilidad (continua) muy común en diversos campos es la *distribución gaussiana o normal*, que tiene la forma de una campana como se ilustra en trazo continuo en la figura xx.1. La expresión matemática de esta distribución (cuyo valor medio es m y cuya desviación estándar es σ) es:[1,2]

$$f(x) = N(x;m,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{xx.8}$$

Decimos que la "campana de Gauss" está centrada en m y tiene un ancho determinado por la desviación estándar σ. Esta distribución está normalizada, esto significa que el área de esta curva entre $-\infty$ y $+\infty$, es igual a 1. Los puntos de inflexión de la curva están en $x-\sigma$ y $x+\sigma$. El área de esta curva entre estos dos puntos constituye el 68.3% del área total. El área entre $x-2\sigma$ y $x+2\sigma$ es del 96% del total. Es útil caracterizar para esta función el ancho a mitad de su altura maxima (FWHM, de "full width half maximum"), que está relacionado con σ a través de la expresión: FWHM = 2.35σ.

Cuando se desea comparar un histograma no normalizado con una curva normal, es necesario contar el número total de datos N_t, el valor medio de los mismos, $\bar{x}$, y la desviación estándar de los datos, S_x. Para comparar el histograma con la curva normal debemos multiplicar la distribución dada por la Ec. (xx.8) por un factor $N_t.\Delta x$, donde Δx es el ancho del rango de clases que suponemos idéntico para cada intervalo.

Aunque la distribución gaussiana ocurre naturalmente en muchos procesos, desde luego no es única y existen muchos tipos de distribuciones de ocurrencia común en la naturaleza.

Magnitud que se mide N veces

Cuando solo podemos medir una magnitud por única vez ($N = 1$), el mejor valor de la medición es simplemente el valor medido y su incertidumbre está dada por la incertidumbre nominal, σ_{nom}, que tiene en cuenta los errores del instrumento, del método y de las operaciones. Es decir:

$$\Delta x = \sigma_{nom} = \sqrt{\sigma_{ap}^2 + \sigma_{def}^2 + \sigma_{\text{int}}^2 + \sigma_{exac}^2 + \ldots} \tag{xx.9}$$

Siempre que sea posible realizar mediciones repetidas de un mesurando, debe optarse por esta posibilidad, ya que midiendo varias veces y promediando el resultado, es posible reducir los errores estadísticos o aleatorios. En esta sección discutiremos distintas estrategias para optimizar este procedimiento.

En muchos casos prácticos es posible realizar N mediciones de la magnitud de interés. Dado el carácter aleatorio de los errores estadísticos, el promedio estará menos afectado de las desviaciones estadísticas que los valores individuales. En todos estos casos es aplicable el tratamiento estadístico de datos que discutimos seguidamente.

El procedimiento de repetición de mediciones no es aplicable para reducir los errores de carácter sistemático y mucho menos los espurios. Si disponemos de un reloj que adelanta, todos los valores medidos por el mismo estarán sobrestimados, independientemente del número de mediciones que realicemos.

Retornando al caso de errores estadísticos; supongamos que hemos hecho N mediciones de una misma magnitud con resultados $x_1, x_2, ..., x_j, ...x_N$. Estas N determinaciones pueden ser consideradas una *muestra* de todas las posibles mediciones que se podrían realizar (*población*). Bajo condiciones muy generales puede demostrarse que el *mejor estimador* de la magnitud x viene dado por el promedio de los valores: [2,3]

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_j}{N} . \qquad \text{(xx.10)}$$

Este resultado es llamado también el *mejor valor*, el *estimador* o el *valor más probable del mesurando*. Llamaremos a

$$\Delta x_j = x_j - \bar{x} \qquad j = 1, 2, ..., \mathrm{N} \qquad \text{(xx.11)}$$

la desviación de cada medición respecto de $\bar{x}$. También definimos la desviación estándar de esta muestra S_x o desviación cuadrática media de las mediciones individuales:

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N} (x_j - \bar{x})^2}{N-1}} . \qquad \text{(xx.12)}$$

Este valor es un *estimador muestral* de la desviación estándar poblacional y da una idea global acerca de la dispersión de los resultados x_j alrededor del promedio $\bar{x}$.

Es importante notar que S_x no depende de *N*, sino del proceso de medición. Si un dado observador aumenta en número de mediciones *N*, en la expresión (xx.1) aumenta tanto el numerador como el denominador, pero el resultado no cambia significativamente. Si medimos con cuidado, S_x será pequeño, pero si realizamos las mediciones sin precauciones o cuidados, es de esperar que S_x sea grande. Así, para este último caso esperamos una distribución de mediciones ancha, S_x será grande. En el caso de mediciones cuidadosas, esperamos la distribución de mediciones esté bien afinada alrededor del promedio $\bar{x}$, S_x será pequeño (ver Fig. xx.1). Nótese que S_x tiene las mismas dimensiones físicas que $\bar{x}$, lo que hace posible compararla directamente con ésta a través del cociente $S_x / \bar{x}$. La calidad del proceso de medición será mayor cuanto menor sea $S_x / \bar{x}$, que en general es una constante del proceso de medición y no depende de *N*.

Si suponemos ahora que realizamos varias series de mediciones de *x*, y para cada una de estas series calculamos el valor medio $\bar{x}$, es de esperar que estos valores medios ($\bar{x}$) también se presenten su propia distribución (puesto que variarán entre sí) pero con una menor dispersión que las mediciones individuales. Se puede probar que a medida que el número N de mediciones aumenta, la distribución de $\bar{x}$ será normal con una desviación estándar dada por[1,2,3,4]

$$\sigma_{est} = \sigma_{promedio} = \sigma_m = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N} (x_j - \bar{x})^2}{N.(N-1)}} = \frac{S_x}{\sqrt{N}}. \qquad \text{(xx.13)}$$

σ_{est} se llama la *desviación estándar del promedio* y en un experimento es una medida de la *incertidumbre estadística* asociada al mejor valor $\bar{x}$ en el proceso de medir la magnitud N veces. Como $\sigma_{est} = S_x / \sqrt{N}$, σ_{est} disminuirá progresivamente al aumentar N, ya que S_x no depende de N.

📖 Cuando el resultado de una medición se expresa como $(\bar{x} \pm \sigma_{est})$, esto es equivalente a decir que el valor de x está contenido en el intervalo ($\bar{x} - \Delta x$, $\bar{x} + \Delta x$) con un nivel de confianza o probabilidad p_0 = 0.68. Es equivalente a expresar:

$$P(\bar{x} - \Delta x < \mathrm{x} < \bar{\mathrm{x}} + \Delta x) = p_0 , \qquad \text{(xx.14)}$$

que se interpreta como "la probabilidad de que el *mejor estimador* de x esté comprendido entre $\bar{x} - \Delta x$ y $\bar{x} + \Delta x$ es igual a p_0". El valor de p_0 se conoce con el nombre de *coeficiente de confianza o nivel de confianza (NC)* y el intervalo $(\bar{x} - \Delta x , \bar{x} + \Delta x)$ determina un *intervalo de confianza* para x.

📖 De acuerdo a lo discutido, es claro que cuando realizamos una serie de N mediciones de una dado mesurando, en realidad lo obtenemos es una muestra, de las infinitas que podríamos obtener, o sea de la infinitas mediciones que se podrían realizar. Como nuestro objetivo en la medición es estimar el valor medio y su respectiva incerteza con algún nivel de confianza (NC), digamos 68%. Suponiendo que la distribución de mediciones tuviese una distribución gaussiana, es claro que los estimadores de estos parámetros serán:

- ✓ Estimador del valor medio➔ $\bar{x} = \sum_{j=1}^{N} x_j \Big/ N$
- ✓ Estimados de la incerteza del valor medio (NC=68%) ➔ $\sigma_{est} = S_x / \sqrt{N}$,

---

Número óptimo de mediciones

Recordemos que S_x mide la dispersión de la distribución de las mediciones individuales y que no depende de N sino de la calidad de las mediciones, mientras que

σ_{est} disminuye al aumentar N. Como vimos en la Ec.(1.3), el error efectivo de una medición viene dado por la combinación de los errores nominales y estadístico, es decir:

$$\Delta x^2 = \sigma_{nom}^2 + \sigma_{est}^2 . \qquad \text{(xx.15)}$$

En principio parece tentador pensar que si medimos una magnitud un gran número de veces, podremos despreciar la contribución de la incertidumbre estadística en la Ec.(xx.15). Ciertamente σ_{est} disminuye al aumentar N, pero el costo en tiempo y dinero también aumenta monótonamente con N. Según la Ec.(xx.15), es claro que solo tiene sentido que disminuir σ_{est} solo hasta que sea igual o del orden de σ_{nom}, que está determinado por el instrumental y el método de medición. Disminuciones mayores de σ_{est} no resultarían en una disminución apreciable del error efectivo Δx y por lo tanto su disminución no resultaría redituable.

La Ec. (xx.15) indica que es razonable disminuir σ_{est} hasta que $\sigma_{est} \approx \sigma_{nom}$. Esto nos da un criterio para decidir cual es el número óptimo de mediciones a realizar. Como S_x es independiente de N, la idea es hacer un número pequeño de mediciones preliminares N_{prel} – digamos entre 5 y 10 – y luego calcular S_x. De las características del instrumento y de los procedimientos usados podemos conocer σ_{nom}. De la condición $\sigma_{est}(N_{op}) = S_x / \sqrt{N_{op}} \approx \sigma_{nom}$, el número óptimo de mediciones será:

$$N_{op} \approx 1 + \left(\frac{S_x}{\sigma_{nom}} \right)^2 , \qquad \text{(xx.16)}$$

el término unidad del segundo miembro nos asegura que siempre es necesario realizar al menos una medición. Si $N_{op} > N_{\mathrm{prel}}$, se completan las mediciones para lograr N_{op} valores y se recalcula σ_x. Si $N_{op} < N_{\mathrm{prel}}$, no se realizan más mediciones que las preliminares y se usan todas ellas. Finalmente, en todos los casos la *incertidumbre absoluta combinada* Δx vendrá dada por la Ec. (xx.15).

Decálogo práctico

En resumen, los pasos a seguir para medir una magnitud física x son:

1. Se analizan posibles fuentes de errores sistemáticos y se trata de minimizarlos.
2. Se estima la incertidumbre nominal σ_{nom}
3. Se realizan 5 a 10 mediciones preliminares y se determina la desviación estándar de cada medición S_x (xx.12).
4. Se determina el número óptimo de mediciones N_{op} (xx.16).
5. Se completan las N_{op} mediciones de x.
6. Se calcula el promedio $\bar{x}$ y la incertidumbre estadística σ_{est}.
7. Se evalúa la incertidumbre absoluta de la medición combinando todas las incertidumbres involucradas, error efectivo Ec.(xx.15).

8. Se expresa el resultado en la forma $x = \bar{x} \pm \Delta x$ con la *unidad correspondiente*, cuidando que el número de cifras significativas sea el correcto. (ver Cap.1)
9. Es útil calcular e indicar la incertidumbre porcentual relativa de la medición ε_x=100. $\Delta x\ /\bar{x}$, lo que puede servir en comparaciones con resultados de otras experimentadores o por otros métodos.
10. Si se desea estudiar la distribución estadística de los resultados (por ejemplo si es normal o no), se compara el histograma de la distribución de los datos experimentales con la curva normal correspondiente, es decir con una distribución normal de media $\bar{x}$ y desviación estándar S_x.

A veces resulta de utilidad no combinar los errores estadísticos con los sistemáticos y explicitar ambos valores, en esos casos el resultado se expresa como: $x = x \pm \sigma_{esta} \pm \Delta x_{sist}$.

Ejemplo 2. Con un calibre de de apreciación nominal de σ_{nom} =0.1 mm se realizaron las siguientes 5 mediciones del diámetro de un cilindro. ¿Son esta mediciones suficientes? ¿Cuál debería ser el número óptimo de mediciones?

d (mm)=	10.2	10.8	11.0	10.0	10.1

En este caso en valor medio es 10.42 mm y σ_{est}=0.2 mm, que es el doble de la apreciación nominal. Por lo tanto deberíamos hacer más mediciones para que $\sigma_{est} \approx \sigma_{nom}$. Usando la Ec.(xx.16) obtenemos N_{op}=21 mediciones.

♣Combinación de mediciones independientes

Una situación frecuente en ciencia es la determinación del mejor valor de una dada magnitud usando varios valores provenientes de mediciones independientes (obtenidos por diferentes autores, con diferentes técnicas o instrumentos, etc.). Cada una de estas mediciones independientes puede tener asociada distintas incertidumbres. Es decir, tenemos un conjunto de *M* mediciones, cada una caracterizada por un par (x_k, σ_k), con k = 1, 2, ..., *M*. Nuestro objetivo es obtener el mejor valor para la magnitud en discusión. Es claro que al combinar los distintos resultados para obtener el mejor valor, $<x>$, es preciso tener en cuenta las respectivas incertidumbres, de tal modo que aquellas mediciones más precisas contribuyan más ("que pesen más") en el resultado final. El mejor valor $<x>$ viene dado por: [3,4]

$$< x >= \frac{\sum_{k=1}^{M} \frac{x_k}{\sigma_k^{\,2}}}{\sum_{k=1}^{M} \frac{1}{\sigma_k^{\,2}}}, \qquad \text{(xx.17)}$$

con una incertidumbre absoluta $\Delta x \equiv \sigma_{<x>}$ dada por[3]

$$\frac{1}{\sigma^2_{<x>}} = \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{\sigma_k^{\ 2}} . \qquad \text{(xx.18)}$$

📖 Un caso especial de interés, es cuando tenemos N determinaciones del mesurando, todas ellas con la misma incertidumbre σ. Como puede deducirse fácilmente de la Ec. (xx.17) el promedio será:

$$< x >= \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k}{N} , \qquad \text{(xx.19)}$$

que, como es de esperar, coincide con la expresión (xx.11). La incertidumbre asociada a este valor será, según la Ec. (xx.18):

$$\sigma_{<x>} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} , \qquad \text{(xx.20)}$$

que coincide con la Ec. (xx.13). Además queda ilustrado el significado de σ como una medida de la dispersión asociada a cada medición individual y $\sigma_{<x>}$ como la dispersión asociada al mejor valor.

Discrepancia

Si una magnitud física se mide con dos o más métodos, o por distintos observadores, es posible –y muy probable– que los resultados no coincidan. Decimos entonces que existe una *discrepancia* en los resultados.

El término *repetibilidad* se usa para describir la concordancia o no entre varias mediciones realizadas por el mismo observador con el mismo método. En cambio la *reproducibilidad* está asociada a la concordancia o no de mediciones realizadas por distintos observadores o distintos métodos.

Lo importante es saber si la discrepancia es significativa o no. Un criterio que se aplica frecuentemente es el siguiente. Si los resultados de las dos observaciones que se comparan son independientes (caso usual) y tienen como resultados:

$$\textit{Medición } 1: \qquad X_1 = \overline{X}_1 \pm \Delta X_1$$

$$\textit{Medición } 2: \qquad X_2 = \overline{X}_2 \pm \Delta X_2$$

definimos:

$$\Delta X^2 = \Delta X_1^2 + \Delta X_2^2 . \qquad \text{(xx.21)}$$

Si los datos tienen distribución normal decimos que con un límite de confianza del 68% las mediciones son distintas si

$$\left|\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right| \geq \Delta X \ , \tag{xx.22}$$

y que con un límite de confianza del 96% las mediciones son distintas si

$$\left|\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right| \geq 2 \cdot \Delta X \ . \tag{xx.23}$$

Estos criterios pueden generalizarse para intervalos de confianza mayores en forma similar. También se aplican cuando se comparan valores obtenidos en el laboratorio con valores tabulados o publicados. Nótese la diferencia entre discrepancia e incertidumbre. La *discrepancia* está asociada a la falta de superposición de dos intervalos (incertidumbres) de dos resultados distintos.

Resumen de conceptos importantes

Se sugiere que el lector de una explicación concisa para los siguientes ítems, y cuando sea posible, indique un ejemplo de los mismos.

- ✓ Describa qué es un histograma y qué es una distribución estadística de un atributo de una población.
- ✓ Explique cómo se obtiene el error de una magnitud que se mide *N* veces.
- ✓ ¿Qué se entiende por mejor valor de una medición?
- ✓ Discuta la diferencia entre la desviación estándar de las mediciones individuales y la desviación estándar del promedio.
- ✓ ¿Cómo se obtiene el error estadístico de una serie de mediciones de un mismo mesurando?
- ✓ ¿Cómo determina el número óptimo de mediciones de una dada magnitud?
- ✓ ¿Cómo combina mediciones independientes de un mismo mesurando?
- ✓ ¿Cuándo decimos que hay discrepancia entre dos o más mediciones?

Referencias

(ver al final)

Ejercicios y problemas

1) ¿Por qué decimos que al realizar una medición tomamos una muestra? ¿Qué representa la desviación estándar de una muestra?

2) ¿Qué es un histograma? ¿Qué información brinda un histograma?

3) Se mide varias veces el diámetro d de una esfera con un calibre y se obtiene:

							Media	Desviación estándar
d (mm)	51.1	52.1	53.2	52.4	53.2		52.4	0.87

a) Indique con su mejor criterio cuál es el error de apreciación del instrumento usado para medir este diámetro.
b) ¿Cuál es el error nominal de cada una de estas mediciones?
c) ¿Cuál es el mejor valor de cada una de estas magnitudes?
d) Analice si el número de mediciones de d son adecuadas, ¿cuál el número óptimo de mediciones de d compatible con el instrumento usado?
e) ¿Cuáles son los errores absoluto y relativo de d?

4) Dos estudiantes realizaron seis mediciones de una misma longitud con una regla graduada en 0.5 mm. Sus resultados, expresados en cm, fueron:

Estudiante A	11.2	11.5	11.6	10.5	11.9	11.0
Estudiante B	11.5	11.6	11.4	11.5	11.5	11.6

a) Indique como deberían expresar cada uno sus resultados finales. ¿Cuál de las mediciones tiene mejor calidad y por qué?
b) Uno de los estudiantes argumenta que ambas mediciones tienen la misma calidad, ya que ambos usaron la misma regla. ¿Cómo responde usted a este argumento?
c) ¿Son coincidentes los resultados encontrados por cada uno? ¿Hay discrepancia entre ambos resultados? Justifique.

5) Se usa un amperímetro digital de 3 ½ dígitos para medir diez veces la intensidad de una corriente eléctrica. En la tabla se muestran los valores medidos.

Medición de corriente (mA)	18.23	18.51	18.00	17.84	18.42	18.11
	18.56	18.60	18.25	17.94	18.06	18.39

a) ¿Cuál es el error nominal de cada medición, si el amperímetro tiene un error de exactitud dado por el fabricante de ±(0.5% lectura + 2 dígitos)?
b) ¿Cuál es la componente de incertidumbre debida a la variación estadística de la corriente?
c) Exprese el resultado de la medición dando el mejor valor de la medición y la incertidumbre que resulta de combinar la incertidumbre estadística y la nominal.

6) Varias personas miden de manera independiente el valor de la aceleración gravitatoria g en Buenos Aires y obtienen: 9.80 ± 0.05 m/s^2, 9.81 ± 0.09 m/s^2 y 9.8 ± 0.1 m/s^2. ¿Cómo expresa el mejor valor de g a partir de la combinación de estas cantidades independientes?

7) Indique si existe una discrepancia significativa o no entre los siguientes pares de resultados de la medición de una misma cantidad física (use los criterios dados por (xx.16) y (xx.17)):

   a) $m_1 = 54.3 \pm 0.3$ g $\quad$ $m_2 = 54.8 \pm 0.1$ g
   b) $v_1 = 100 \pm 3$ m/s $\quad$ $v_2 = 105 \pm 3$ m/s
   c) $g_1 = 9.82 \pm 0.05$ m/s^2 $\quad$ $g_2 = 10.00 \pm 0.05$ g
   d) $Q_1 = 77.0 \pm 0.3$ m^3/s $\quad$ $Q_2 = 78.0 \pm 0.5$ g

Histogramas

Objetivo

El objetivo de estos experimentos es analizar una serie de mediciones de una magnitud física usando conceptos básicos de estadística y mediante la construcción de un histograma.

Introducción

Cuando se realizan N mediciones de una misma magnitud x en condiciones de repetibilidad (es decir, cuando se realizan las mediciones independientes bajo las mismas condiciones, igual método y observador), es necesario realizar un análisis estadístico de los datos. En esta actividad se sugiere efectuar un análisis estadístico de los datos y expresar el resultado de la medición en términos de los estimadores estadísticos *valor medio* $<x>$, *desviación estándar de la muestra* S_x y *desviación estándar de la media* σ_{est}. Los datos obtenidos pueden representarse en un histograma, del cual puede apreciarse cómo es la distribución de valores. El mismo tipo de análisis puede emplearse en un proceso de control de calidad cuando se estudia un *lote* de un producto a controlar y se analiza el grado de dispersión de alguna de sus propiedades alrededor de un valor medio.

Proyecto 7. Construcción de Histogramas y estudio de distribuciones empíricas

Usando los datos de las planillas Excel "Histo1.xls" que puede descargar de Internet (http://www.fisicarecreativa.com/ajp/soft_sg.htm), para cada una de las hojas correspondientes, construya un histograma y calcule los parámetros: media, mediana, moda y desviación estándar.

a) En cada unos de los casos, discutan que tipo de distribución muestran sus datos.
b) Indique si las distribuciones son simétricas o no.
c) ¿Son unimodales?
d) Si la distribución es simétrica y unimodal, superponga al histograma la curva normal (o de Gauss) que mejor ajuste las distribución observada.
e) Si los primeros 50 datos de cada hoja fuesen el resultado de mediciones de una dada magnitud, indique en cada caso el mejor valor de las mismas y su correspondiente error.
f) Si las cifras significativas en cada hoja indica cual fue el error nominal en dichas mediciones, indique si las primeras 50 mediciones son un número apropiado o si se necesitan más o tal vez menos. En todos los casos justifique sus respuestas.

Proyecto 8. Histograma obtenido artesanalmente

Con una regla que no exceda 20 cm realice del orden de 100 mediciones de la longitud de la mesa que ocupa o la altura de una puerta. Realice las mediciones lo más rápido que pueda. Divida el trabajo entre los miembros de su equipo.

- ✓ Con los datos obtenidos por cada observador, realice un histograma que muestre la frecuencia de ocurrencia de cada medición.
- ✓ Para cada conjunto de mediciones, determine el mejor valor de la longitud $<x>$, la desviación estándar de la muestra (o la desviación estándar cada medición) S_x, y la desviación estándar del promedio σ_x. Si usa Excel ®Microsoft, la función *Desvest* calcula directamente la desviación estándar de la muestra, o sea S_x.
- ✓ Reúna también todas las mediciones en un solo histograma y determine el valor medio de todos los valores obtenidos, la desviación estándar y la desviación estándar del promedio.
- ✓ Usando los valores medios y los de las desviaciones estándares para cada conjunto de datos, represente sobre cada uno de los histogramas las curvas de Gauss correspondientes a estos parámetros. Nota: Cuando se desea comparar un histograma no normalizado (es decir un histograma cuya área no sea la unidad) con una curva normal, es necesario calcular el número total de datos N_t en el conjunto, el valor medio de los mismos, $\bar{x}$ y la desviación estándar de dichos datos, σ_x. Si supondremos que el rango de clases está equiespaciado con una separación Δx (= $x_i - x_{i-1}$). Para comparar el histograma con la curva normal debemos multiplicar la distribución (xx.10) por el factor $N_t \cdot \Delta x$.
- ✓ ¿Qué puede decir acerca del carácter de la distribución de los resultados obtenidos en sus mediciones? ¿Están los valores distribuidos normalmente?

Referencias

[1] Spiegel y Murray, *Estadística*, 2da ed. (McGraw Hill, Schaum, Madrid, 1995).

[2] H. Cramér, *Teoría de probabilidades y aplicaciones* (Aguilar, Madrid, 1968); H. Cramér, *Mathematical method of statistics* (Princeton University Press, New Jersey, 1958).

[3] P. Bevington and D. K. Robinson, *Data reduction and error analysis for the physical sciences*, 2nd ed. (McGraw Hill, New York, 1993).

[4] D. C. Baird, *Experimentación: una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos*, Pearson Educación, México 1991.

Índice Alfabético

Marcadores	Nombre Marcador
histogramas	Histograma
valor medio	medio
varianza	Varianza
desviación estándar	desviacion
Distribución Normal	Gauss
Distribución Gaussiana	Gauss
discrepancia	Discrepancia
número óptimo de mediciones	Optimo
combinación de mediciones independientes	comb