Programma per l’epoca di matematica in IX classe

Primo giorno
Il crivello di Eratostene

2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31
32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43
44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61
62	63	64	65	66	67
68	69	70	71	72	73
74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85
86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97
98	99	100	101	102	103
104	105	106	107	108	109
110	111	112	113	114	115
116	117	118	119	120	121
122	123	124	125	126	127
128	129	130	131	132	133
134	135	136	137	138	139
140	141	142	143	144	145
146	147	148	149	150	151
152	153	154	155	156	157
158	159	160	161	162	163
164	165	166	167	168	169
170	171	172	173	174	175
176	177	178	179	180	181
182	183	184	185	186	187
188	189	190	191	192	193
194	195	196	197	198	199
200	201	202	203	204	205
206	207	208	209	210	211
212	213	214	215	216	217
218	219	220	221	222	223
224	225	226	227	228	229
230	231	232	233	234	235
236	237	238	239	240	241
242	243	244	245	246	247
248	249	250	251	252	253
254	255	256	257	258	259
260	261	262	263	264	265
266	267	268	269	270	271
272	273	274	275	276	277
278	279	280	281	282	283
284	285	286	287	288	289
290	291	292	293	294	295
296	297	298	299	300	301

1. Cancella tutti i multipli di 2 ma non il 2 stesso con un colore. Evidenzia il numero 2 con un cerchio.
2. Cancella ora con un altro colore tutti i multipli del prossimo numero dopo il 2 non ancora cancellato evidenziando tale numero con un cerchio.
3. Ripeti il secondo passaggio fino a che non ci sono più numeri che possono essere cancellati.
4. Evidenzia alla fine tutti i numeri che non sono stati cancellati.

Un numero primo è un numero naturale maggiore di 1 che non ha divisori positivi tranne 1 e se stesso.

Tutti i numeri primi minori di 1000:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997

Quando mi posso fermare con la convinzione che tutti i numeri non primi sono stati cancellati?
Quando raggiungo il numero primo immediatamente inferiore a sqrt(301), perché tutti gli altri possibili multipli sono già stati cancellati precedentemente, per esempio $17 \cdot 11$ era già stato cancellato quando abbiamo tolto i multipli di 11. Analogamente, $17 \cdot 13$ pure. Con il 17 rimane solo $17 \cdot 17$ da cancellare. Il prossimo numero non ancora cancellato ($19 \cdot 17$) supera 301.

Secondo giorno

Scomponi in fattori primi i seguenti numeri:

a) 45	$5 \cdot 3^2$
b) 25	$5 \cdot 5$
c) 175	$5^2 \cdot 7$
d) 154	$2 \cdot 7 \cdot 11$
e) 84	$2^2 \cdot 3 \cdot 7$
f) 30	$2 \cdot 3 \cdot 5$
g) 210	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
h) 125	5^3
i) 90	$2 \cdot 3^2 \cdot 5$
l) 36	$2^2 \cdot 3^2$
m) 900	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
n)150	$2 \cdot 3 \cdot 5^2$
k) 625	5^4

Cosa si nota nella scomposizione dei vari fattori? Sono tutti numeri primi. Arriviamo quindi al

Teorema fondamentale dell'aritmetica (scomposizione in fattori primi)

Ogni numeri naturale maggiore di 1 o è un numero primo o si può esprimere come prodotto di numeri primi. Tale rappresentazione è unica se si prescinde dall'ordine in cui compaiono i fattori.
Questo teorema prevede che 1 non sia considerato un numero primo, altrimenti ogni numero avrebbe infinite scomposizioni possibili.
Es. $12 = 3 \cdot 4$
Ma anche: $12 = 3 \cdot 4 \cdot 1 = 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1$, ecc.

I numeri primi sono infiniti o finiti?

Teorema dell'infinità dei numeri primi
Dimostrazione di Euclide

Supponiamo che il numero p sia l'ultimo ed il più grande numero primo, e che non ce ne siano altri dopo di lui. Cerchiamo quindi un numero primo partendo dal prodotto dei numeri primi che già conosciamo:

$2 \cdot 3 + 1 = 7$
7 è un numero primo più grande di 2 e 3. Cancelliamo ora i multipli di 5 e osserviamo la seguente espressione:

$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$

31 è di nuovo un numero primo più grande di 2, 3 o 5. Continuiamo così:

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$ è un numero primo più grande di 7
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311$ è un numero primo più grande di 11
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031$ che non è un numero primo.

30031 si lascia scomporre in $59 \cdot 509$, entrambi numeri primi, ed entrambi più grandi di 13. Vediamo quindi che man mano che procediamo in questa ricerca, troveremo sempre o un numero primo, oppure un numero scomponibile in numeri primi più grandi del numero primo appena raggiunto.
Consideriamo quindi un numero primo p e procediamo come già fatto:

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot .....p + 1$

Questo numero non è divisibile per nessun numero primo fino a p, perché rimane sempre il resto 1. Questo significa però che il valore dell'espressione o è un numero primo in se, oppure è divisibile per un numero primo più grande di p. Se p diventa grande a piacere, si possono sempre trovare nuovi numeri primi più grandi.

=> i numeri primi sono infiniti!!

Dimostrazione di Euclide [modifica]

La dimostrazione, molto semplice in termini moderni, è esposta negli Elementi di Euclide e può a buon diritto essere considerata la prima dimostrazione di un teorema di teoria dei numeri.

La dimostrazione avviene per assurdo, con il seguente ragionamento:

Si supponga che i numeri primi non siano infiniti ma solo $P=\{2, 3, \ldots, p_n\}$; p_n sarebbe allora il più grande dei numeri primi. Ora sia $a \in N$ il prodotto degli n numeri primi, e consideriamo $a+1$. Questo numero non è divisibile per 2, perché lo è a e quindi ha resto 1. Non è divisibile neanche per 3, per lo stesso motivo...in generale, detto p_i l'i-esimo numero primo, la divisione $(a+1)/p_i$ ha sempre resto 1: infatti assumendo $(a+1)$ come dividendo, p_i come divisore, $q \in N$ come quoziente della divisione, è sufficiente dimostrare che $(a+1)$-$(q*p_i)$=1, cioè che a=$(q*p_i)$assunto come ipotesi.

A questo punto, per il teorema fondamentale dell'aritmetica, sono possibili due casi:

1° o $a+1$ è primo, e ovviamente essendo maggiore di p_n quest'ultimo non è il più grande dei numeri primi;

2° o $a+1$, non essendo primo, è il prodotto di numeri primi che non possono figurare tra gli n ipotizzati (in quanto $a+1>a$) e che devono quindi essere maggiori di p_n; anche in questo caso segue che p_n non è il più grande dei numeri primi.

In entrambi i casi si perviene alla conclusione che non può non esistere un numero primo più grande p_n e dunque i numeri primi sono infiniti.

In realtà, solo pochi dei numeri $a+1$ (detti numeri di Euclide) così trovati sono primi, perché il divario tra p_n e a cresce circa come il fattoriale, e quindi c'è sempre più possibilità che $a+1$ abbia un divisore tra p_n e $\sqrt{a+1}$.

Possiamo trovare una formula che mi dice quali numeri sono primi?

Proviamo con un esempio: y = 2n + 1. Che numeri genera questa formula? Tutti i numeri dispari, che includono ovviamente anche i numeri primi, ma non solo.
La risposta è no, per ora non è nota alcuna formula che mi permette di trovare tutti i numeri primi. Sono per ora stati calcolati tantissimi numeri primi.

Esistono però alcune formule che danno alcuni numeri primi, per esempio:

$n^2 + n + 41$
$n^2 - 79n + 1601$ (per n da 0....79)

I numeri primi trovano grande applicazione al giorno d'oggi per la criptografia.

Il concetto è il seguente. Una persona prende due numeri primi *x* e *y* grandi (chiave privata) e li moltiplica (ottenendo il numero *z* anche detto chiave pubblica). I numeri primi *x* e *y* servono alla decrittazione del messaggio. Alle persone viene fornito il numero *z* con cui esse possono crittare il loro messaggio. Essendo molto difficile la scomposizione in numeri primi, che viene fatta solo per tentativi ricorsivi, sarà molto difficile per una persona che non possiede la chiave privata decrittare il messaggio.

Anche in natura appaiono talvolta numeri primi, come il ciclo delle cicade, un insetto che si rifugia sotto terra per 17 anni per poi emergere e riprodursi, ed infine ritornare sotto terra per 17 anni.

Terzo giorno

Effettuare le seguenti divisioni:

1/1 1/2 1/3 1/4 1/5 1/6 1/7 1/8 1/9 1/10 1/11
1/12 1/13 1/14 1/15 1/16 1/17 1/18 1/19 1/19

Possiamo ottenere 2 tipi di risultati:

- risultati decimali finiti
- risultati decimali periodici (semplici, 8.55555... , misti, 8.43555555...) con periodo e antiperiodo

Effettuare ora i seguenti calcoli:

1/7 2/7 3/7 4/7 5/7 8/7 16/7 27/7

Otteniamo:

$0.\overline{142857}$ $0.\overline{285714}$ $0.\overline{428571}$ $0.\overline{571428}$ $0.\overline{714285}$ $1.\overline{142857}$

$2.\overline{285714}$ $3.\overline{857142}$

Si nota qualcosa di particolare nei periodo dei diversi risultati?
Le cifre del periodo sono sempre le stesse, ma cambia l'ordine in cui cominciano.

Proviamo ora a moltiplicare il numero 142857 (periodo di 1/7) con il numero 326451 (sequenza dei resti della divisione).

Proviamo a fare lo stesso con il numero 13:

1/13 2/13 3/13 4/13 5/13 6/13 7/13 8/13 9/13 11/13

Otteniamo:

$0.\overline{076923}$ $0.\overline{153846}$ $0.\overline{230769}$ $0.\overline{307692}$ $0.\overline{384615}$ $0.\overline{461538}$

$0.\overline{538461}$ $0.\overline{615384}$ $0.\overline{692307}$ $0.\overline{846153}$

Appare chiaro che qui abbiamo 2 sequenze periodiche nei risultati, 076923 e 153846.
Troviamo qualche altra correlazione?

Proviamo ad analizzare le due sequenze ed i relativi resti:

1	10	9	12	3	4
0	7	6	9	2	3

e

2	7	5	11	6	8
1	5	3	8	4	6

La somma dei resti è sempre divisibile per 13, infatti:

1+10+9+12+3+4 = 39 (3 · 13)
2+7+5+11+6+8 = 39 (3 · 13)
Inoltre, la sequenza periodica dà sempre 9 se sommata a due a due (0+9, 7+2, 6+3 e 1+8, 5+4, 3+6)

La somma dei numeri periodici di una frazione in cui il denominatore è un numero primo è sempre divisibile per 9:

$1/7 = 0.\overline{142857}$	$1+4+2+8+5+7 = 27 = 9 \cdot 3$
$1/13 = 0.\overline{076923}$	$0+7+6+9+2+3 = 27 = 9 \cdot 3$
$1/41 = 0.\overline{02439}$	$0+2+4+3+9 = 18 = 9 \cdot 2$
$1/73 = 0.\overline{01369863}$	$0+1+3+6+9+8+6+3 = 36 = 9 \cdot 4$

Se il numero di cifre del periodo di una divisione in cui il denominatore è un numero primo è pari, la somma dei resti a due a due è sempre uguale al denominatore stesso.

Es.

1/13: resti:	1	10	9	12	3	4

->1+12, 10+3, 9+4

2/13: resti:	2	7	5	11	6	8

->2+11, 7+6, 5+8

1/7: resti:	1	3	2	6	4	5

->1+6, 3+4, 2+5

Si ottiene anche un numero divisibile per 9 se si sommano le cifre decimali di una divisione con numero primo a pacchetti.

Es.

$1/17 = 0.\overline{0588235294117647}$

05+
88+
23+
52+
94+
11+
76+
47=
$396 = 9 \cdot 44$

0588+
2352+
9411+
7647=
$19998 = 9 \cdot 2222$

05882352+
94117647=
$99999999 = 9 \cdot 11111111$

TUTTO È RITMICO!!!

Quarto giorno

Perché con 7 avevamo un ciclo del periodo che si ripeteva con tutte le divisioni, mentre che con 13 avevamo 2 cicli?

La lunghezza del periodo dipende unicamente dal denominatore, se il denominatore è un numero primo. Tutte le frazioni con denominatore 13 hanno una lunghezza di periodo 6.
Con tredicesimi possiamo però avere al massimo 12 resti. Ma visto che il periodo rimane sempre di 6, devono esserci 2 diversi cicli, perché un resto può soltanto apparire in un ciclo.

$1/41 = 0.\overline{02439}$ abbiamo per esempio un periodo di 5 cifre, che si ricombinano in 8 diversi cicli, perché la quantità massima di resti è di 40.

In frazioni con un numero primo a denominatore vale quindi:

La lunghezza del periodo moltiplicato per il numero di cicli è pari al valore di denominatore meno uno (= numero di possibili resti).

Es.

	Lunghezza del periodo	Numero di cicli	
37i	3	12	$3 \cdot 12 = 36 = 37-1$
67i	33	2	$33 \cdot 2 = 33 = 67-1$
101i	4	25	$4 \cdot 25 = 100 = 101-1$
173i	43	4	$43 \cdot 4 = 172 = 173-1$

Conversione di un numero razionale in una frazione

Se il numero è finito, la conversione è molto semplice e rapida:

$5.25 = 525/100$

Ma se il numero è decimale periodico, come facciamo?

$z = 1.\overline{216}$

$1000z = 1216.\overline{216}$

$1000z - z = 1216.\overline{216} - 1.\overline{216}$
$999z = 1215$
$z = 1215/999 = 45/37$

Es.
$z = 1.083333..$
$1000z = 1083.333...$
$100z = 108.333...$

$900z = 975$
$z = 900/975 = 13/12$

Es.
$z = 0.\overline{9}$

$10z = 9.\overline{9}$

$z = 0.9$

$9z = 9$
$z = 9/9 = 1$

Quinto giorno

10. Dal prodotto alla potenza

Osserviamo ora come normali moltiplicazioni di numeri portano a prodotti.

Esempi:

$6 = 3 \cdot 2$ $\qquad$ $12 = 3 \cdot 4$ $\qquad$ $2 = 2 \cdot 1$

Vi sono anche prodotti che possiedono più di 2 fattori:

$12 = 2 \cdot 3 \cdot 2$ $\qquad$ $20 = 2 \cdot 5 \cdot 2$ $\qquad$ $720 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$

Tra questi prodotti, ve ne sono alcuni con fattori uguali, come per esempio

$$64 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{6} \qquad 81 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4} \qquad 36 = \underbrace{6 \cdot 6}_{2}$$

In casi di questo genere, contiamo i fattori e creiamo una potenza. Il fattore che viene sommato lo chiamiamo *la base*, mentre che il numero di volte che lo sommiamo lo chiamiamo *esponente.* Esso indica quante volte appare lo stesso fattore. I 3 esempi vengono rappresentati quindi in questo modo:

$64 = 2^6$ $\qquad$ $81 = 3^4$ $\qquad$ $36 = 6^2$

Il fatto che la base e l'esponente non vengano scritti alla stessa altezza si motiva nel modo seguente: confrontiamo 2^3 e 3^2, e vediamo subito che le due potenze non rappresentano lo stesso numero:

$2^3 = 8$ e $3^2 = 9$

Base ed esponente non possono quindi in generale essere scambiati. Per questa ragione si scrivono ad altezza diversa.

Possiamo quindi dare una forma generale alle potenze:

$P_1 = a \bullet b$

Ci sono però anche prodotti multipli

$P_2 = a \bullet b \bullet c$

Tra i prodotti multipli, ve ne sono alcuni in cui tutti i fattori sono uguali. Se per esempio abbiamo 2 fattori uguali,

$$P_3 = \underbrace{a \cdot a}_{2}$$

allora li contiamo, e scriviamo

$P_3 = a^2$

Se un prodotto ha 3 moltiplicandi uguali, scriviamo

$$P_4 = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3}$$

Scritto come potenza:

$P_4 = a^3$

Se abbiamo quindi un numero indefinito n di fattori uguali,

$$P = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot .....a}_{n}$$

Scriviamo

$P = a^n$

Definiamo ancora che $a^1 = a$ e che $a^0 = 1$

Esercizi:

1. Rappresenta i numeri 64, 128, 256, 6561, 10000 in diversi modi come potenze

2. Cerca numeri tra 0 e 30 che puoi rappresentare come somme o differenze di 2 quadrati. Trovi tra questi anche numeri quadratici?

3. Cerca dei numeri tra 0 e 30 che puoi rappresentare come somme o differenze di numeri cubici. Trovi tra questi anche numeri cubici?

4. Nomi particolari delle potenze di 10. Si definisce 10^1 dieci, 10^2 cento, 10^3 mille, 10^6 milione, 10^9 miliardo (attenzione, in inglese si chiama "billion"), 10^{12} bilione (attenzione, in inglese "trillion"), 10^{15} biliardo, 10^{18} trilione, 10^{21} triliardo, e cosi via. Per una lettura più facile, con numeri grandi si mettono punti, virgole, o apostrofi ogni 3 cifre.

Leggi le cifre 111.222.333; 444.333.222.111, 9.876.543.210, 12.345.678.987.654.321

5. Numeri grossi si rappresentano spesso nelle scienze come potenze di 10. Quindi, per esempio 912436752 ~ $9 \bullet 10^8$, oppure, per essere più precisi,

$9.1 \bullet 10^8$. Rappresenta i numeri dell'esercizio precedente in questa maniera.

Soluzioni

1. $64 = 64^1 = 8^2 = 4^3 = 2^6$;

$128 = 2^7$

$256 = 4^4 = 2^8$

$6561 = 81^2 = 9^4 = 3^8$

$10.000 = 100^2 = 10^4$

2.

$7 = 4^2 - 3^2$;

$8 = 2^2 + 2^2 = 2^3$;

$9 = 0^2 + 3^2 = 5^2 - 4^2$;

$10 = 1^2 + 3^2$;

$11 = 6^2 - 5^2$;

$13 = 2^2 + 3^2 = 7^2 - 6^2$;

$15 = 8^2 - 7^2$;

$16 = 0^2 + 4^2$;

$17 = 1^2 + 4^2 = 9^2 - 8^2$;

$18 = 3^2 + 3^2$;

$19 = 10^2 - 9^2$;

$20 = 2^2 + 4^2 = 6^2 - 4^2$;

$21 = 11^2 - 10^2$;

$23 = 12^2 - 11^2$;

$24 = 5^2 - 1^2$;

$25 = 3^2 + 4^2 = 13^2 - 12^2$;

$26 = 5^2 + 1^2$;

$27 = 14^2 - 13^2 = 3^3$;

$29 = 15^2 - 14^2$;

3. Senza l'utilizzo dello zero, si ottiene:

$7 = 2^3 - 1^3$;

$9 = 3^2 = 2^3 + 1^3$;

$19 = 3^3 - 2^3$;

$26 = 3^3 - 1^3$;

$28 = 3^3 + 1^3$;

10.1 Regole delle potenze

Prima legge delle potenze

$$a^n \bullet a^m = a^{n+m}$$

Potenze con base uguale a possono essere moltiplicate sommando gli esponenti

Seconda legge delle potenze

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Potenze con base uguale a possono essere divise facendo la sottrazione degli esponenti

Terza legge delle potenze

$$a^n \bullet b^n = (a \bullet b)^n$$

Potenze con basi diverse ed esponente n uguale, possono essere moltiplicate elevando a n il prodotto delle basi

Quarta legge delle potenze

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Potenze con basi diverse ed esponente n uguale, possono essere divise elevando a n il quoziente delle basi

Attenzione: *la potenza di una somma o di una differenze, è in generale diversa dalla somma o dalla differenza delle potenze dei singoli sommandi:*

$(a + b)^n \neq a^n + b^n$ oppure $(a - b)^n \neq a^n - b^n$

Esempi:

$(2 + 3)^2 = 5^2 = 2^5 \neq 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$
$(5 - 3)^2 = 2^2 = 4 \neq 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$
Cosa significa quindi a^1? Dalla terza legge delle potenze, possiamo derivare:

$$a^1 = a^{3-2} = \frac{a^3}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a$$

In parole: la prima potenza di tutti i numeri $a \neq 0$ vale a.

Cosa significa a^0?
Analogamente possiamo costruire a^0 come a^{2-2}, e otteniamo:

$$a^0 = a^{2-2} = \frac{a^2}{a^2} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a} = 1$$

In parole: la potenza nulla di tutti i numeri $a \neq 0$ vale 1.

Vale inoltre che tutte le potenze di 1 valgono 1: $1^n = 1$ *per tutti i numeri n.*

Esercizi:

1. Calcola: 2^1, 1^2, 2^3, 3^2, 2^4, 4^2, 2^5, 5^2, 2^6, 6^2.

2. Rappresenta i numer 64, 81 e 1024 nel massimo numero di modi possibili come potena

3. Per cosa bisogna moltiplicare 5^{12}, per ottenere 10^{12}?

4. Calcola: $\left(\frac{1}{2}\right)^4; \left(\frac{2}{3}\right)^3; \left(\frac{3}{4}\right)^2; \left(\frac{4}{5}\right)^1; \left(\frac{5}{6}\right)^0;$

5. Calcola: $\frac{8^3}{4^3}; \frac{15^2}{5^2}; \frac{12^4}{6^4}; \frac{7^3}{21^3}; \frac{9^2}{27^2}; \frac{a^5}{a^2}; \frac{a^2}{a^5};$

Soluzioni:

1. 2, 1, 8, 9, 16, 16, 32, 25, 64, 36.

2. $64^1 = 8^2 = 4^3 = 2^6$; $81^1 = 9^2 = 3^4$; $1024^1 = 32^2 = 4^5 = 2^{10}$.

3. 2^{12}, perchè $5^{12} \bullet 2^{12} = (5 \bullet 2)^{12} = 10^{12}$

4. $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}; \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}; \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}; \left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{4}{5}; \left(\frac{5}{6}\right)^0 = 1;$

5. $\frac{8^3}{4^3} = \left(\frac{8}{4}\right)^3 = 2^3 = 8; rispettivamente \frac{15^2}{5^2} = 3^2 = 9; \frac{12^4}{6^4} = 2^4 = 16;$

$$\frac{7^3}{21^3} = \frac{1}{27}; \frac{9^2}{27^2} = \frac{1}{9}; \frac{a^5}{a^2} = a^3; \frac{a^2}{a^5} = \frac{1}{a^3};$$

Il logaritmo

Data una potenza $p^a = r$, possiamo calcolare da due delle tre grandezze il valore della terza. Se vogliamo calcolare *r*, dobbiamo elevare ad *a* il numero *p*. Analogamente, attraverso la radice quadrata o la radice cubica o la radice n-esima, possiamo calcolare

partendo da *a* e *r* il valore di *p*. Ma se viene chiesto: quanto vale l'esponente *a* se elevando 5 al numero *a* devo ottenere il valore 125? La risposta è naturalmente $a = 3$, perché $5^3 = 125$.
Il calcolo in cui viene chiesto l'esponente di un numero, si chiama *logaritmo*, e la domanda appena posta si può esprimere matematicamente come:

$\log_5 125 = 3$.

Che si legge: il logaritmo di 125 in base 5 è uguale a 3.

Sesto giorno

Come faccio a fare 45^2 in maniera facile?

$$
\begin{array}{l}
\;\;45^2 \\
1625\ (4^2 \text{ e } 5^2) \\
\underline{\;\;40\;\;(4} \cdot 5 \cdot 2) \\
2025
\end{array}
$$

Come si calcola la radice?
Si potrebbe procedere per tentativi, per esempio, la radice di 2025 sarà un numero tra 40 (perché $40^2 = 1600$) e 50 (perché $50^2 = 2500$). Poi si va per tentativi provando il quadrato di tutti i numeri tra 40 e 50.

Un altro metodo è la fattorizzazione.

Per esempio $\mathrm{sqrt}(784) = \mathrm{sqrt}(2^4 \cdot 7^2) = \mathrm{sqrt}((2^2 \cdot 7)^2) = 2^2 \cdot 7$

oppure $\mathrm{sqrt}(5625) = \mathrm{sqrt}(3^2 \cdot 5^4) = \mathrm{sqrt}((3 \cdot 5^2)^2) = 3 \cdot 5^2$

Altrimenti si può usare il seguente algoritmo:

1. sqrt(20'25) =45
2. $\underline{16}$
3. 42'5:85
4. $\underline{425}$
5. - -

1. Divido il numero in gruppi di due a partire dal fondo (20'25) e osservando il primo blocco di cifre cerco di definire il più basso quadrato contenuto (4) che sarà il primo numero del risultato.
2. Sottraggo il quadrato trovato (16) dal primo blocco.
3. Il risultato è 4. Abbasso il prossimo blocco e separo l'ultima cifra. Divido il primo blocco (42) con il doppio del risultato ($4 \cdot 2 = 8$). Fa circa 5 che si scrive accanto all'8 e che sarà possibilmente la seconda cifra del risultato.
4. Moltiplico la cifra del risultato 5 per 85. Il risultato deve essere uguale o più piccolo del risultato sopra (42'5). Se fosse più grande, la seconda cifra del risultato deve essere diminuita di 1 ed il calcolo ripetuto.

5. Sottraggo questa moltiplicazione dal valore sovrastante e procedo nello stesso modo. Se la radice è perfetta, avrò resto 0, altrimenti avrò un resto che, con l'aggiunta di 2 zeri e l'introduzione della virgola, mi permetterà di continuare il calcolo

Quando si vuole calcolare anche le cifre dopo la virgola, si mette la virgola nel risultato e si aggiungono 2 zeri e si procede come visto in precedenza.

Identità delle radici:

sqrt(x ·y) = sqrt(x) · sqrt(y)

sqrt(x/y) = sqrt(x)/sqrt(y)

Settimo giorno

Numeri irrazionali

Da Pitagora sappiamo che l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele di lato 1 è pari a sqrt(2), perché:

sqrt(1^2 + 1^2) = sqrt(2)

È possibile esprimere questo numero in frazione?

No, perché possiede un numero infinito di cifre sempre diverse (non periodiche) dopo la virgola. Tali numeri, di cui fanno parte il Pi greco (3.14..), la sezione aurea (1.618...) ed il numero di Eulero (2.718..), sono detti numeri irrazionali.

Le prime 50 cifre della radice di 2 sono:

1, 41421 35623 73095 04880 16887 24209 69807 85696 71875 37694...

Esiste però una rappresentazione come frazione continua:

$$\mathrm{sqrt}(2) = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

Vediamo come si comporta tale numero: (v. pagina allegata)

Il valore oscilla vicino al valore esatto diventando mano a mano sempre più preciso quante più iterazioni si calcolano.

Come mai allora ci interessano questi numeri? I matematici amano lasciarli nella loro forma elegante, cioè come radici. Il fatto di utilizzare numeri con le radici permette effettivamente di fare calcoli, anche se i moltiplicandi hanno un infinito numero di cifre dopo la virgola.

es.: sqrt(2) · sqrt(18) = 6

Come lo dimostro?

$18 = 2 \cdot 3^2$

$sqrt(18) = sqrt(2 \cdot 3^2) = sqrt(2) \cdot sqrt(3^2)= sqrt(2) \cdot 3$

-> sqrt(2) · sqrt(18) = sqrt(2) · sqrt(2) · 3 = 2 · 3 = 6

oppure più semplicemente:

sqrt(2) · sqrt(18) = sqrt(2 · 18) = sqrt(36) = 6

Ottavo giorno

Fondamenti di analisi matematica

Viene dato il numero $p = a^2$

Calcolare il numero p per a che va da -5 a +5

a	p
-5	25
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

Ora, disegniamo la retta dei numeri che rappresenta i valori di a, e sulla verticale disegniamo una retta che rappresenta i valori di p. Che curva otteniamo?

Otteniamo una parabola.

Facciamo una tabella simile per i seguenti valori di p:

$p = a^2 - 2$
$p = a^2 + 2$
$p = a^2 + a$

$p = a^2 - a$
$p = a^2 + a + 1$

Che cosa succede alla parabola con questo tipo di valori? Che influsso ha la *a* non elevata? Che influsso ha il numero libero?
Se continuo verso il basso e verso l'alto, la curva diventerà ad un certo punto verticale?

Proviamo ora a disegnare la seguente parabola:

$p = - a^2$

Nono giorno

Vogliamo ora disegnare una retta. Che valori devo assegnare a p?

per esempio, p = 3 è una retta parallela all'asse a (per ogni a, p vale sempre 3)

E se la retta deve essere obliqua?

per esempio, possiamo dire che p = a

Cosa ottengo ora se faccio:
p = a + 2
p = a - 2
p = 2a
p = - a
p = - 3a

Possiamo quindi verificare molti tipi di funzioni:

p = 1/a
$p = a^3$

Decimo giorno

Probabilità

Esistono affermazioni certe, come per esempio:
"Il Nilo è il fiumo più lungo del mondo" oppure
"Il ferro è un metallo", oppure
"Oggi è una giornata soleggiata"

Ma esistono anche affermazioni non certe, come:

"Domani pioverà"
"Il Lugano vincerà il campionato di Hockey"
"Se tiro un dado verrà il 6"

Queste ultime affermazioni esprimono situazioni probabili, ma non verità assolute. Esse esprimono eventi incerti, detti anche eventi aleatori. IL settore della matematica che studia situazioni di questo tipo è la probabilità. L'obbiettivo della probabilità è di stabilire regole per quantificare le situazioni casuali e aleatorie.

Supponiamo di tirare un dado. Quale è la probabilità che verrà il numero 6?
I possibili numeri sono: 1, 2, 3, 4, 5 e 6, pari a 6 possibili risultati.

Chiamamo l'evento "esce il numero 6" evento A.

Abbiamo quindi che $p(A) = 1/6$

Quale sarebbe la probabilità che esce un numero pari (evento B)?

$p(B) = 3/6 = 1/2$

Possiamo calcolare la probabilità che esca un numero primo:

$p(C)\ \{2, 3, 5\} = 3/6 = 1/2$

Un'altro evento potrebbe essere che esca il numero 0

$p(0) = 0$ (detto anche evento impossibile)

oppure che escano i numeri 1, 2, 3, 4, 5 e 6:

$p(D) = 6/6 = 1$ (detto anche evento certo)

Altro esempio: 5 palline bianche e 7 palline rosse.

La probabilità del verificarsi di un evento si esprime con il rapporto fra il numero di risultati favorevoli ed il numero di risultati possibili.

Esempio:

un urna contiene 70 palline indistinguibili tra loro eccetto che per il colore, delle quali 10 bianche, 15nere, 20 verdi, 25 rosse. Si estrae a caso una pallina. Qual'è la probabilità che la pallina estratta sia bianca, nera, verde, rossa, bianca o nera, verde o rossa, bianca, nera o verde?

Esempio:
Si lanciano due dadi da gioco. Qual'é la probabilità che il totale dei punti ottenuti sia almeno 10?

Il numero di casi possibili è la libera associazioni di ogni numero del primo dado per ogni numero del secondo, quindi 6x6=36 casi possibili.

B= ottenere 10
C = ottenere 11
D = ottenere 12

casi favorevoli di B = 3 (4-6, 5-5, 6-4)
casi favorevoli di C = 2 (5-6, 6-5)
casi favorevoli di D = 1 (6- 6)
P(B) = 3/36
P(C) = 2/36
p(D) = 1/36

Quindi la probabilità totale è 3/36+2/36+1/36 = 6/36 = 1/6

La somma delle probabilità deve sempre essere uguale a 1!

Undicesimo giorno

Eventi dipendenti e indipendenti

Un'urna contiene 6 palline bianche e 8 nere. Si estraggono successivamente due palline senza rimettere la prima nell'urna. Qual'é la probabilità di estrarre 2 palline bianche?

1 pallina bianca: P(A) = 6/14
Seconda pallina bianca P(B) = 5/13

Probabilità che siano tutte due bianche:

$6/14 \cdot 5/13 = 30/182 = 15/91$

Dodicesimo giorno

Calcolo Combinatorio

Abbiamo già visto che se vogliamo sapere il numero delle combinazioni possibili quando tiriamo 2 dadi dobbiamo fare:

$6^2 = 36$

Infatti, contando le possibili combinazioni, avremmo:

1-1	2-1	3-1	4-1	5-1	6-1
1-2	2-2	3-2	4-2	5-2	6-2
1-3	2-3	3-3	4-3	5-3	6-3
1-4	2-4	3-4	4-4	5-4	6-4
1-5	2-5	3-5	4-5	5-5	6-5
1-6	2-6	3-6	4-6	5-6	6-6

Per un totale di 36 possibili combinazioni.
Questo tipo di disposizioni sono chiamate **disposizioni con ripetizione.** Questo perché possiamo vedere che l'ordine è determinante e quindi abbiamo coppie di valori uguali in cui l'ordine cambia (per esempio 4-5 e 5-4 sono considerate come due possibilità).

le disposizioni con ripetizioni si definiscono nel seguente modo:

$$D^r_{n,k=}n^k$$

Dove n è il numero di elementi distinti e k è la grandezza dei gruppi ordinati.

Prendiamo ora un'altro esempio.

In quanti modi si possono disporre 6 allievi su banchi a due a due?

Abbiamo gli allievi a, b, c, d, e, f

quindi:

a-b	b-a	c-a	d-a	e-a	f-a
a-c	b-c	c-b	d-b	e-b	f-b
a-d	b-d	c-d	d-c	e-c	f-c
a-e	b-e	c-e	d-e	e-d	f-d
a-f	b-f	c-f	d-f	e-f	f-e

Pari a 30 possibili disposizioni. Ovviamente in questo caso non è possibile considerare una situazione del tipo a-a perché gli allievi non si possono sdoppiare.

Questo tipo di disposizioni si chiamano **disposizioni semplici** e si calcolano nel seguente modo:

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$$

Dove n è il numero di elementi (nel nostro esempio, 6) e k è la grandezza dei gruppi che si creano (2 nel nostro caso)

Nel nostro esempio, avremmo quindi:

$6 \cdot (6-2+1) = 6 \cdot 5 = 30$

Se i banchi fossero stati da 5 persone, avremmo calcolato:

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ disposizioni possibili.

Tredicesimo giorno

Prendiamo ora un'altro esempio.

Quanti numeri di 3 cifre, fra loro diversi, si possono formare con le cifre 3,5,1?

proviamo a trovarle tutte:

135
153
315
351
513
531

Per un totale di 6 combinazioni. Questo tipo di esempio si calcola come 3!, detto 3 fattoriale, che è il prodotto dei numeri naturali fino al numero 3.

Per esempio: $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Regola generale per il fattoriale di un numero

Se k è un numero naturale maggiore di 1, si chiama fattoriale del numero k, e si indica con k!, il prodotto dei primi k numeri naturali, cioè:

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (k-1) \cdot k$$

Un esempio come quello dato sopra è definito **permutazione semplice**, e si calcola con la seguente formula:

$$P_n = n!$$

La permutazione semplice può anche essere vista come una disposizione semplice in cui k = n, infatti, in tal caso, avremmo:

$$D_{n,k} = D_{n,n} = n(n-1)(n-2) ... (n-n+1) = n!$$

Quattordicesimo giorno

Riprendiamo ora l'esempio delle disposizioni semplici, ma considerando che le posizioni degli allievi non abbiano importanza, ci interessa solo quanti allievi possono mettersi sui banchi, senza dare rilevanza a chi stà seduto a destra o a sinistra. Avremmo:

a-b	~~b-a~~	~~c-a~~	~~d-a~~	~~e-a~~	~~f-a~~
a-c	b-c	~~c-b~~	~~d-b~~	~~e-b~~	~~f-b~~
a-d	b-d	c-d	~~d-c~~	~~e-c~~	~~f-c~~
a-e	b-e	c-e	d-e	~~e-d~~	~~f-d~~
a-f	b-f	c-f	d-f	e-f	~~f-e~~

Gli elementi rigati sono da eliminare perché se l'ordine non conta, esistono già.

Avremmo quindi un totale di 15 combinazioni possibili.

Come otteniamo questo numero?

Con la seguente formula:

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}$$

Nel caso specifico, avremmo quindi:

$$C_{6,2} = \frac{6 \cdot 5}{2!} = \frac{30}{2} = 15$$

Questo tipo di combinazioni si chiamano **Combinazioni semplici**. Il ragionamento è che abbiamo una disposizione semplici che va divisa per le possibili permutazioni dei k elementi, quindi si divide per k!.