التمرين الأول :

I - بسط التعابير التالية : (4,5)

$$A = 2\ln\sqrt{e} - 3\ln e^{2}$$

$$B = \ln(2\sqrt{2}) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right) - \ln(\sqrt{5}+\sqrt{3})$$

$$C = \ln(\sqrt{2}+1)^{2010} + \ln(\sqrt{2}-1)^{2010}$$

II - بيّن أن : (4,5)

① $(\forall x \in]0,+\infty[) : \ln(x^4+1) - \ln\left(1+\frac{1}{x^4}\right) = 4\ln x$

② $(\forall x \in]2,+\infty[) : \ln(x - 2\sqrt{x-1}) = 2\ln(\sqrt{x-1} - 1)$

③ $(\forall x \in \mathbb{R}) : \ln(\sqrt{x^2+1} + x) + \ln(\sqrt{x^2+1} - x) = 0$

III - حل في المجموعة IR ما يلي : (7)

① $\ln(2x+1) = \ln x$	② $2\ln x - 1 = 0$
③ $\ln(x+2) + \ln(x+3) = \ln 6$	④ $\ln(x+1) \geqslant \ln(1-x)$
⑤ $\ln(x-1) < 3$	⑥ $\ln(3x^2-x) - \ln(x) \geqslant \ln 2$

IV - حدد مجموعة تعريف كل دالة من الدالتين التاليتين، ثم حدد دالتها المشتقة : (4)

① $f : x \longmapsto \ln(3x) + x$	② $g : x \longmapsto \ln(x-2) + \frac{1}{x}$

V - احسب النهايات التالية : (07)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln^2 x + \ln x - 2$	$\lim\limits_{x\to 0^+} 3x - x^3 \ln x$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{4x^2+1}{x^2+3}\right)$
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + x - \ln x$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$	$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$ ، ضع $t=\sqrt{x}$

التمرين الثاني : (13)

I - نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$$

1° - احسب $g'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$. (01)

2° - اعط جدول تغيرات الدالة g (حساب النهايات غير مطلوب) (01)

3° - استنتج أن : $(\forall x \in]0,+\infty[) : g(x) \geq 3$ (01)

II - لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$f : x \longmapsto \frac{x}{2} + \frac{\ln x}{x}$$

1° - تحقق من أن : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. (01)

2° - أ - بين أن : (01,5)

$$(\forall x \in]0,+\infty[) : f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$$

ب - اعط جدول تغيرات الدالة f . (01)

3° - أ - تحقق من أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = \frac{x}{2}$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$. (01)

ب - ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) . (01)

4° - أ - بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الأفاصيل في نقطة وحيدة أفصولها α . وأن $\frac{1}{2}<\alpha<1$ (01)

ب - أنشئ المنحنى (C_f) في م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$ $(\|\vec{i}\|=2cm)$ (0,5)

5° - أ - بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية ثم حدد مجموعة تعريفها. (0,5)

ب - تحقق من أن $-2\ln\alpha=\alpha^2$ ثم استنتج أن : $(f^{-1})'(0)=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+1}$ (01)

ج - باستعمال السؤال I - 3° . بين أن (C_f) يوجد تحت المستقيم (D) الذي معادلته : $(D): y=x$ (01)

د - أنشئ في نفس المعلم السابق وبلون مغاير منحنى الدالة العكسية للدالة f ، $(C_{f^{-1}})$. (0,5)

Bonne chance