التمرين الأول: (4,5ن)

لتكن $(U_n)_{n\geq 0}$ المتتالية العددية المعرفة كالتالي:

$$\begin{cases} U_0 = \frac{4}{3} \\ U_{n+1} = \frac{3U_n}{1+U_n} \; ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1° - أ - بين أن: $1 < U_n < 2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ (0,75ن)

ب - ادرس رتابة المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ واستنتج أن: $\frac{4}{3} \leqslant U_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ (0,75ن)

2° - نعتبر المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كمايلي: $(\forall n \in \mathbb{N}) : V_n = \frac{U_n}{2-U_n}$

أ - بين أن (V_n) متتالية هندسية، ثم أكتب V_n بدلالة n. (0,75ن)

ب - بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n = \frac{4 \times 3^n}{1+2\times 3^n}$ (0,75ن)

ج - احسب نهاية المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$. (0,50ن)

3° - أ - ليكن $n \in \mathbb{N}$، تحقق أن: $2 - U_n = \frac{2}{1+2\times 3^n}$ (0,50ن)

ثم استنتج أن: $10^{-4} - (2-U_n) = \frac{3^n - 9999,5}{5000(2\times 3^n + 1)}$

ب - حدد أصغر عدد صحيح طبيعي n بحيث $2 - U_n < 10^{-4}$ (0,50ن)

التمرين الثاني: (5,25ن)

I - حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $z^2 - 2z + 2 = 0$ (1ن)

II - نعتبر في المستوى العقدي $\mathcal{P}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$ النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي:

$$a = 1+i \; ; \; b = \sqrt{2} \; ; \; c = a + b$$

1° - مثل في المستوى $\mathcal{P}$ النقط A و B و C. (0,75ن)

(ن 1)	2° أ ـ أكتب على الشكل المثلثي العددين العقديين a و b .
(ن 0,25)	ب ـ استنتج أن المثلث OAB متساوي الساقين رأسه O .
(ن 1)	ج ـ لتكن (Δ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى العقدي بحيث z بحيث $\lvert z-a \rvert = \lvert z-b \rvert$ حدد ومثل المجموعة (Δ) .
(ن 0,5)	د ـ تحقق من أن $C \in (\Delta)$ ، ثم استنتج قياسا للزاوية $\widehat{(\vec{u}, \vec{OC})}$
(ن 0,75)	3° ـ استنتج أن $\operatorname{Arg}(c) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$ ، ثم حدد قيمة كل من $\cos(\frac{\pi}{8})$ و $\sin(\frac{\pi}{8})$.

(ن 4,25)	**التمرين الثالث :** I ـ نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $g : x \longmapsto 2x - \ln x$
(ن 1)	1° ـ بين أن الدالة g تناقصية على المجال $]0,\frac{1}{2}]$ وتزايدية على المجال $[\frac{1}{2},+\infty[$.
(ن 0,50)	2° ـ استنتج أن : $g(x) > 0 \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$
	II ـ لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي . $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x + \ln x}{2x - \ln x} & ; x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$ وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
(ن 0,50)	1° أ ـ تحقق من أن مجموعة التعريف الدالة f هي : $D = [0, +\infty[$
(ن 0,25)	ب ـ تحقق من أن : $f(x) = \dfrac{2 + \frac{\ln x}{x}}{2 - \frac{\ln x}{x}} \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$
(ن 0,50)	ج ـ استنتج أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ ، ثم أول هندسيا هذه النتيجة .

(0,50)	2° - أ - بين أن الدالة f متصلة على اليمين في الصفر .
(0,75)	ب - ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في الصفر، ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها .
(1)	3° - أ - بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ وأن : $(\forall x \in]0,+\infty[) : \quad f'(x) = \dfrac{4(1-\ln x)}{(2x-\ln x)^2}$
(0,50)	ب - استنتج أن الدالة f تناقصية قطعا على المجال $]e,+\infty[$ وتزايدية قطعا على المجال $[0,e]$.
(0,50)	4° - أ - بين أن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في نقطة وحيدة أفصولها α ينتمي إلى المجال $]1/4, 1/2[$.
(0,50)	ب - اعط معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي أفصولها 1 .
(1)	ج - مثل (C) و (T) .
	5° - لتكن h قصور الدالة f على المجال $[0,e]$.
(0,50)	أ - بين أن الدالة h تقبل دالة عكسية h^{-1} ، محددا مجموعة تعريفها .
(0,50)	ب - بين أن h^{-1} قابلة للاشتقاق في 1 ، ثم احسب $(h^{-1})'(1)$
	6° - نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \quad U_n = h^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$
(0,50)	أ - تحقق من أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \quad U_n > \alpha$
(0,50)	ب - بين أن المتتالية (U_n) تناقصية
(0,75)	ج - استنتج أن (U_n) متقاربة ، ثم حدد نهايتها .