

تمرين 3

لتكن f دالة عددية معرفة من \mathbb{R} نحو \mathbb{R} و قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0=0$ بحيث $f(0)=0$ و $f'(0)=1$.

حدد النهاية التالية: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\prod_{k=1}^n f(kx)}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

تمرين 4

لتكن φ دالة عددية معرفة على \mathbb{R} و قابلة للاشتقاق مرتين على \mathbb{R} حيث تحقق العلاقة التالية:

$$(\mathcal{R}): (\forall x \in \mathbb{R}), \varphi''(x) = (1+x^2)\varphi(x)$$

بين أنه إذا كانت u و v دالتين تحققان العلاقة (\mathcal{R}) ، فإن: $uv' - u'v$ دالة ثابتة.

تمرين 5

f و g دالتين عدديتين بحيث: $f'(x) = \frac{1}{x}$ و $f \circ g(x) = x$.

1. بين أنه إذا كانت g قابلة للاشتقاق، فإن:

$$g'(x) = g(x)$$

2. استنتج أن: $\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(x) = g(x)$.

تمرين 6

f دالة عددية معرفة على \mathbb{R} و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} .

أدرس زوجية الدالة f' حسب زوجية الدالة f .

تمرين 7

I مجال من \mathbb{R} و a عنصر منه.

لتكن f و g دالتين عدديتين قابلتين للاشتقاق على I بحيث:

$$f(a) = g(a) \text{ و } f(x) + x \leq g(x) + a \text{ (} \forall x \in I \text{),}$$

بين أن: $g'(a) - f'(a) = 1$.

تمرين 8

f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجال I مركزه

$$0 \text{ بحيث: } \forall x \in I, f(x) = (x^2 + 1)g(x) - \frac{g(x^2)}{x+1}$$

أحسب $f'(0)$ علما ان: $g'(0) = 0$ و $g(0) = 1$.

تمرين 1

نعتبر الدالة العددية h المعرفة على \mathbb{R} بما يلي:

$$h(x) = x^3 - 3x - 1$$

1. ادرس تغيرات الدالة h .
2. بين أن المعادلة $h(x) = 0$ (E) تقبل ثلاث حلول حقيقية (نرمز للحلول الثلاث ب x_1 و x_2 و x_3). أحسب:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \text{ و } x_1x_2x_3 \text{ و } x_1 + x_2 + x_3$$

تمرين 2

لتكن f و g دالتين معرفتين على مجال $[a, b]$ حيث $a < b$. نفترض أن:

- f و g متصلتان على $[a, b]$ و قابلتان للاشتقاق على $]a, b[$.

$$\bullet \quad \forall x \in]a, b[\quad |f'(x)| \leq g'(x)$$

1. بين أن دالة تزايدية على $[a, b]$.
2. بين أن $(f - g)$ تناقصية على $[a, b]$ ، ثم استنتج أن: $f(b) - f(a) \leq g(b) - g(a)$.
3. بين أن $(f + g)$ تزايدية على $[a, b]$ ، ثم استنتج أن:

$$-(f(b) - f(a)) \leq g(b) - g(a)$$

$$4. \text{ استنتج أن: } |f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$$

5. تطبيقات:

❖ دالة عددية معرفة و متصلة على مجال

$[a, b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a, b[$

بحيث:

$$(\exists M \geq 0)(\forall x \in]a, b[): |h'(x)| \leq M$$

$$\text{بين أن: } |h(b) - h(a)| \leq M(b - a)$$

ماذا يمكن القول في حالة: $M = 0$ ؟

$$\bullet \text{ بين أن: } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{16}\right) \leq \frac{\pi}{48}$$

تمرين 15

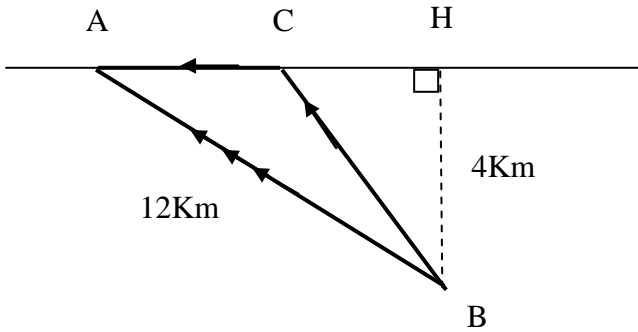
بين أن: $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin x \geq \frac{2}{\pi}x$

تمرين 16

من بين المثلثات القائمة الزاوية و التي لها نفس المحيط، ما هو المثلث الذي يكون شعاع دائرته المحاطة قصويا؟

تمرين 17

أراد شخص أن يذهب من نقطة B إلى نقطة A تبعد عن B بمسافة 12Km يمكنه أن يذهب مباشرة مشيا على الأقدام بسرعة 5Km/h أو أن يلتحق في نقطة C بطريق تقع على مسافة 4Km من النقطة B حيث تسير حافلة بسرعة 40Km/h. حدد موضع النقطة C بحيث تكون مدة السفر الكلية دنوية.



تمرين 18

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي:
 $f(x) = 3\sin(2\alpha x) + 2\sin(3\beta x)$ حيث α و β عدنان حقيقيان.
 نفترض أن: $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq |\sin x|$
 1. بين أن: $|f'(0)| \leq 1$
 2. استنتج أن: $|\alpha + \beta| \leq \frac{1}{6}$

ذ. علي تاموسيت

<http://www.9alami.info>

تمرين 9

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.
 1. بين أن: $\forall x \in \mathbb{R}^+, (1+x)^n \geq 1+nx$
 2. استنتج أن: $(1+n)^n \geq 2n^n$

تمرين 10

لتكن f و g دالتين عدديتين غير منعدمتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R} .
 n عدد صحيح طبيعي.
 بين ما يلي:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}; \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g};$$

$$\left(\frac{f^n}{f}\right)' = n \frac{f'}{f}$$

تمرين 11

ادرس قابلية اشتقاق الدالتين f و g في النقطة $x_0 = 0$ حيث:

$$\begin{cases} f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x) = x \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases} \text{ و}$$

تمرين 12

مساحة مستطيل هي $81m^2$.
 حدد بعدي هذا المستطيل لكي يكون محيطه دنويا.

تمرين 13

انطلاقا من حبل طوله l نقوم بتقسيمه لجزأين أحدهما تكون به دائرة بينما الآخر تكون به مربع.
 حدد موضع قطع الحبلين لكي تكون المساحة المحددة بالدائرة و المربع قصوية.

تمرين 14

بين أن: $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sin x \leq x$