ثا.المختار السوسي .نيابة الخميسات	تمارين و أنشطة درس: مبادئ في المنطق	مادة : الرياضيات
cherifalix@hotmail.com	❶http://www.9alami.info ❶	الأستاذ : علي الشريف

أنشطة لبناء الدرس

نشاط رقم 1 : (مفهوم العبارة)

1) انقل الجدول التالي إلى دفترك ثم ضع العلامة " × " في الخانة المناسبة :

	صحيح	خطأ
كل عدد زوجي قابل للقسمة على 4		
مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي		
$\sqrt{2}$ عدد جذري		
الإزاحة تحافظ على المسافات		
الدالة x^2 دالة زوجية		

2) هل توجد من بين الجمل الواردة في الجدول أعلاه جمل صحيحة و خاطئة في آن واحد .

نشاط رقم 2: (نفي عبارة)

في حوار جرى بين فاطمة و أحمد , أساسه أن كل ما قالته فاطمة ينفيه أحمد و كل ما قاله أحمد تنفيه فاطمة , أنقل الجدول التالي إلى دفترك ثم أملئه :

ماقالته فاطمة	ماقاله أحمد	حكمك على قول فاطمة	حكمك على قول أحمد
$\sqrt{2}\in IN$			
	$\sqrt{7}+\sqrt{2}\prec 5$		
114516 مضاعف ل4			
	$\sqrt{(-2)^2}=-2$		

نشاط رقم 3: (عطف و فصل عبارتين)

أنقل التعابير التالية إلى دفترك ثم أتمم الفراغات بآستعمال إحدى أداتي الربط التاليتين "أو" أو " و " لكي تصبح عبارات صحيحة معللا جوابك في كل حالة :

1) $x(x-1)=0$ يعني أن $x=1$ .... $x=0$

2) $ABCD$ معين يعني أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ .... $AB=BC$

3) ABC متساوي الأضلاع يعني أن $AB=AC$ ..... $AB=BC$

4) ليكن x و y من IR لدينا $x\le y$ يعني أن $x\prec y$ ... $x=y$

5) ليكن x من IR لدينا $|x|=x$ .... $|x|=-x$.

6) ليكن x من IR لدينا $|x|\prec 1$ يعني أن $x\prec 1$ .... $x\succ -1$

7) ليكن x من IR لدينا $|x|\ge 1$ يعني أن $x\ge 1$ .... $x\le -1$

نشاط رقم 4: (آستلزام و تكافؤ عبارتين)

ليكن ABC مثلثا قائم الزاوية في A و غير متساوي الساقين نعتبر العبارات التالية :

P : " ABC مثلث قائم الزاوية في النقطة A "

Q : " $BC^2=AB^2+AC^2$ "

R: ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في النقطة A "

S: " $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ " .

لدينا " إذا كان ABC مثلث قائم الزاوية في النقطة A

فإن " $BC^2=AB^2+AC^2$ " عبارة صحيحة .

نعبر عن ذلك بالقول " إذا كانت العبارةP صحيحة فإن العبارة Q صحيحة و نقول كذلك العبارة P تستلزم العبارة Q

و نكتب : $P\Rightarrow Q$.

1) هل الإستلزامات التالية صحيحة :

* $Q\Rightarrow P$ * $P\Rightarrow R$ * $S\Rightarrow P$ * $P\Rightarrow S$

2) لدينا (ABC مثلث قائم الزاوية في النقطة A تكافئ العبارة " $BC^2=AB^2+AC^2$ ")

نقول في هذه الحالة العبارة P تكافئ العبارة Q .

و نكتب : $P\Leftrightarrow Q$.

حدد من بين العبارات التالية الصحيحة منها :

أ – ليكن n من IN : n زوجي $\Leftrightarrow$ n + 1 فردي .

ب - ليكن x من IR : $(x^2=1)\Leftrightarrow x=1$.

ج - ليكن x من *IR : $(x\succ 0)\Leftrightarrow(\frac{1}{x}\prec 0)$.

د – I منتصف $[AB]$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{BI}=\vec{0}$.

نشاط رقم 5: (الدالة العبارية و المكممات)

نعتبر التعبير التالي : $(x\in IR)\;;\;x^2-x\ge 0$

1) من أجل $x=2$ لدينا $(2^2-2\ge 0)$ عبارة صحيحة .

من أجل $x=\frac{1}{2}$ لدينا $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\ge 0\right]$ عبارة خاطئة

هل التعبير $x^2-x\ge 0$ صحيح من أجل :

أ) $x=-1$, ب) $x=\frac{1}{3}$, ج) $x=3$, د) $x=\frac{2}{5}$.

التعبير $(x\in IR)\;;\;x^2-x\ge 0$ يصبح صحيحا من أجل بعض قيم x من IR و خاطئا من أجل قيم أخرى . هذا التعبير يسمى دالة عبارية .

نشاط رقم 6: (المكمم الكوني)

لتكن E مجموعة حلول المتراجحة $(x\in IR)\;;\;x^2-x\ge 0$

1) حدد المجموعة E

لكل x من E لدينا $x^2-x\ge 0$ عبارة صحيحة

نكتب $(\forall x\in E)\;;\;x^2-x\ge 0$ و نقرأ لكل x من E : $x^2-x\ge 0$

2) هل العبارتان التاليتان صحيحتان ؟

* $(\forall x\in IR)\;;\;x^2-x\ge 0$.

* $(\forall x\in Q)\;;\;x^2-x\ge 0$ $(\forall x\in Q)\;;\;x^2-x\ge 0$.

نشاط رقم 7: (المكمم الوجودي)

توجد عناصر من Q تحقق المتراجحة $x^2-x\ge 0$.

مثلا $x=\frac{3}{2}$ نعبر عن هذا بالكتابة : $\exists x\in Q\;;x^2-x\ge 0$

هل العبارتان التاليتان صحيحتان ؟

* $(\exists x\in IN);x^2-x\ge 0$

* $(\exists x\in Q);x^2-3=0$

نشاط رقم 8:(الإستدلال بالإستلزام المضاد للعكس)

1) لتكن P و Q عبارتين, أكتب العبارتين $P\Rightarrow Q$ و $\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}$ بأستعمال عمليتي النفي و الفصل المطقيين فقط . ماذا تستنتج ؟

عمليا : للبرهنة على أن $P\Rightarrow Q$ عبارة صحيحة نبين في بعض الأحيان أن $\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}$ هذا النوع من الإستدلال يسمى بالإستلزام المضاد للعكس (آنتبه إلى ترتيب العبارات) .

2) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا . نعتبر العبارتين :

P : " n عدد زوجي " و Q : " n^2 عدد زوجي "

أ) بين أن : $P\Rightarrow Q$.

ب) ماذا يمكنك أن تقول عن الإستلزام $\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}$ ؟

ج) آستنتج أنه إذا كان n^2 عددا فرديا فإن n عدد فردي .

3) بأستعمال الإستدلال بالإستلزام المضاد للعكس . بين أن :

أ) $\left(a^2+2\sqrt{a}-3 \rangle 0 \Rightarrow a\rangle 1\right)$ حيث a عدد حقيقي موجب .

ب) $\left(a\neq b\Rightarrow \frac{a+1}{a-1}\Rightarrow\neq\frac{b+1}{b-1}\right)$ حيث a و b عنصران من $IR-\{1\}$.

نشاط رقم 9: (الإستدلال بالتكافؤ)

نقترح عليك برهانين آ ستعمل فيهما الرمز " $\Leftrightarrow$ " بطريقة مسترسلة . أحد البرهانين خاطئ . و المطلوب منك التعرف عليه مع إعطاء تعليل لجوابك .

1) ليكن x من IR لدينا : $\sqrt{x^2+3}\geq 2\Leftrightarrow x^2+3\geq 4$

$\Leftrightarrow x^2\geq 1$

$\Leftrightarrow x\geq 1$

2) ليكن x منIR لدينا : $x+\frac{1}{x}\geq 2\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}-2\geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+1-2x}{x}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$$

نشاط رقم 10:(الإستدلال بالخلف)

1) لتكن P و Q عبارتين بحيث $\left(\overline{Q}\Rightarrow 7P \text{ و } \overline{Q}\Rightarrow P\right)$

إذاكانت Q عبارة خاطئة , ماذا يمكنك أن تقول عن قيمة حقيقة العبارة P ؟

عمليا : للبرهنة على أن عبارة Q صحيحة , نفترض أنها خاطئة (أي $\overline{Q}$ صحيحة) ثم نبين أن : $\overline{Q}\Rightarrow P$ و $\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}$ و هذا تناقض . هذا النوع من الإستدلال يسمى الإستدلال بالخلف .

2) ليكن a و b عددين صحيحين بحيث : $a+b\sqrt{2}=0$.

لتكن P العبارة " $\sqrt{2}$ عدد لا جذري " و Q العبارة " $b=0$ "

أ) بين أنه إذا كانت Q عبارة خاطئة فإن P عبارة خاطئة .

ب) ما هي قيمة حقيقة العبارة P ؟

ج) آستنتج أن : $b=0$.

بين بأستعمال نفس طريقة السؤال 2 , أنه إذا كان a و b عددين

_ حقيقين و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير مستقيميتين

بحيث : $a.\vec{u}+b.\vec{v}=\vec{0}$ فإن $a=0$ و $b=0$

.

نشاط رقم 11: (الإستدلال بفصل الحالات)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا و P الدالة العبارية :

" $n(n+1)$ عدد زوجي : $n\in IN$ " .

1) أنقل و إملاء الجدول التالي :

n	1	2	3	4	5	6
n(n+1)						

ثم حدد قيمة العبارة P في الحالات المذكورة في الجدول :

2) أ) نفترض أن $n=2k$ حيث k عدد صحيح طبيعي .

أ حسب $n(n+1)$ بدلالة k ثم آستنتج قيمة حقيقة الدالة العبارية P .

ب) نفترض أن $n=2k+1$ حيث k عدد صحيح طبيعي .

أحسب $n(n+1)$ بدلالة k ثم آستنتج قيمة حقيقة الدالة العبارية P.

ج) حدد حقيقة الإستلزام التالي :

$$\left(n=2k \text{ أو } n=2k+1\right)\Rightarrow\left(n(n+1)\text{ زوجي}\right)$$

ثم آستنتج قيمة حقيقة :

$$\left(n\in IN\right)\Rightarrow\left(n(n+1)\text{ زوجي}\right)$$

نشاط رقم 12: (الإستدلال بالترجع)

نعتبرالخاصية $P(n)$ $2^n\rangle n$ حيث n ينتمي إلى IN .

1) تحقق من أن العبارة $P(0)$ صحيحة .

2) بين أ ن $P(n)\Rightarrow P(n+1)$ عبارة صحيحة مهما يكنn من IN.

3) بأستعمال الإستدلال الإستنتاجي آ ستنتج أ ن العبارة $P(5)$ صحيحة

تمارين تطبيقية

التمرين التطبيقي رقم 1 :

1) أعط نفي كل عبارة من العبارات الآتية محددا قيمة حقيقتها :

P: " $\sqrt{17}\succ\sqrt{8}+\sqrt{9}$ " .

Q: " $\frac{9}{4}\neq\frac{3}{2}$ " .

R: " $\pi\in Q$ " .

2) حدد قيمة حقيقة العبارات الآتية :

P: " $\pi^2\geq 10$ و $4-\pi\rangle 0$ " .

Q: " $\cos(\pi)=1$ أو $\cos(\pi)=-1$ " .

R:" كل متوازي الأضلاع قطراه متعامدان هو مربع "

التمرين التطبيقي رقم 2 :

1) حدد من بين العبارات الآتية الصحيحة منها و الخاطئة .

P: " $0\in IN\Rightarrow Z\subset IN$ "

Q: " $\sqrt{3}\rangle\frac{3}{2}\Rightarrow\sqrt{3}\rangle 1$ "

R: " $\sqrt{3}+\sqrt{2}\langle\sqrt{5}\Rightarrow\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=5$ "

مادة : الرياضيات
الأستاذ : علي الشريف

ثا.المختار السوسي .نيابة الخميسات
cherifalix@hotmail.com

2) نفس السؤال :

$P:$ "$(a\in IR)$; $a^2=1 \Leftrightarrow a=1$"

$Q:$ "$(a\in IR^+)$; $a^2=1 \Leftrightarrow a\rangle\sqrt{3}$"

$R:$ "$\sqrt{2x+2}-\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1$"

التمرين التطبيقي رقم 3:

1) عبر عن النصوص التالية بإستعمال المكممات .

أ - لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد على الاقل عدد صحيح طبيعي k بحيث $k\geq n$.

ب - مربع كل عدد حقيقي موجب .

ج - كل عدد صحيح طبيعي يقبل القسمةعلى 8 هو مضاعف للعدد 4

2) أوجد العبارات النافية للعبارات الآتية :

أ - $(\forall x\in IR);(x\geq 0$ أو $x\leq 0)$.

ب - $(\exists x\in IN);(x+1\rangle x^2)$.

التمرين التطبيقي رقم 4:

لتكن f دالة تزايدية قطعا على مجال I, و a وb عنصرين من I بحيث $f(a)=b$ و $f(b)=a$ بين أ ن : $a=b$

التمرين التطبيقي رقم 5:

1) لتكن f دالة تزايدية قطعا على مجال I , وa و bعنصرين من I بحيث $f(a)=b$ و $f(b)=a$, بين أن : $a=b$.

2) ليكن a و b عددين حقيقيين .

بين أن : $a+b\rangle 1 \Rightarrow \left(a\rangle\frac{1}{2}\right.$ أو $\left.b\rangle\frac{1}{2}\right)$

التمرين التطبيقي رقم 6:

1) لكل n من IN* نضع : $A_n=3^{2n}-2^n$

تحقق من أن لكلn من IN* : $A_{n+1}=2A_n+7.3^{2n}$

2) بين بالترجع أ ن لكل n من IN* : 7 يقسم A_n .

تمارين الدعم و التثبيت

العمليات على العبارات - المكممات

التمرين رقم 1 :

أ عط قيمة حقيقة العبارات التالية :

1) " النقطة C هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) في المثلث ABC القائم الزاوية في A ".

2)" الشكل القانوني للحدودية $-2x^2+6x+1$: هو $-2\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)$ "

3) $(\sqrt{9}=-3)$ و $((-3)^2=9)$

4) $(\sqrt{3}+\sqrt{7}\rangle 3)$ أو (π عدد جدري)

5) $(\sqrt{12}\neq 3)$ و $(\sqrt{4}=2)$

التمرين رقم 2 :❸

حدد S مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تكون فيها الدالة العبارية صحيحة في كل من الحالات التالية :

1) "$\vec{u}(1-x,2)$ و $\vec{v}((1-x)^2,(1-x))$ مستقيميتان $x\in IR$ "

2) "$x\in IR;x^2-x-12=0$" .

3) "$x\in IR;x^3-4x^2+5x-2=0$" .

التمرين رقم 3 :

أ كتب العبارات التالية بآستعمال المكممات و الروابط المنطقية .

1) كل عدد جدري a يكتب $a=\frac{p}{q}$ حيث $p\in Z$ و $q\in IN^*$

2) يوجد عدد صحيح طبيعي و حيد أ صغر من أ و يساوي جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية .

3) مهما يكن x من IR يوجد عدد صحيح نسبي و حيد p بحيث $p\leq x\leq p+1$.

4) لكل x من IR يوجد على الاقل n من IN بحيث $n\geq x$

5) كل عدد صحيح طبيعي يقبل القسمة على 8 هو مضاعف للعدد4

6) لكل k من Z يوجد p من Z بحيث $k=2p$ أو $k=2p+1$

7) ABCمثلث قائم الزاوية في A إ ذا و فقط إذا كان I منتصف القطعة $[BC]$ يبعد بنفس المسافة عن رؤوس المثلث ABC

التمرين رقم 4 :

حدد نفي كل عبارة من العبارات التالية ثم آ ستنتج صحتها:

$(P):(\exists\, x\in Q)/x^2-2\neq 0$

$(Q):(\forall n\in Z)(\exists m\in Z)/3n-2m=\sqrt{5}$

$(R):(\forall\, y\in IR)(\exists\, x\in IR)/\frac{2x}{1+x^2}\langle\, y$

التمرين رقم 5 : (الإستدلال بفصل الحالات)

1) بين أ ن : $(\forall x\in IR);\sqrt{x^2+1}+x\rangle 0$

2) حل في IR المعادلة : $x^2-|x-2|+5=0$

3) حل النظمة : $\begin{cases}2|x-1|-y=4\\|x|+2y=6\end{cases}$.

4) بين أن : $n(n+1)(n+2)$

التمرين رقم 6 : (الإستدلال بالإستلزام المضاد للعكس)

1) بين أ ن : $x+y\rangle 2z \Rightarrow x\rangle z$ أو $y\rangle z$ حيث x و yو z أعداد حقيقية

2) $(\forall x\in IR):x\neq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1}\neq 1+\frac{x}{2}$

3) $(\forall(x;y)\in IR^2)\ y\neq -\frac{3}{4}x \Rightarrow \frac{x-y}{x+y}\neq 7$

4 $\forall(x,y)\in IR^2\ \ x\neq y \Rightarrow (x+1)(y-1)\neq(x-1)(y+1)$

cherifalix@hotmail.com

التمرين رقم 7 : (الإستدلال بالتكافؤ)

1) ليكن a و b و c أعداد حقيقية .

أ) بين أ ن : $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$

ب) بين أ ن : $a^3+a=b^3+b \Leftrightarrow a=b$

2) ليكن a و b عددين حقيقيين من المجال $]-1,1[$

بين أ ن : $-1 \langle \dfrac{a+b}{1+ab} \rangle 1$.

3) ليكن x عددا حقيقيا .

بين أ ن : $|x-1| \langle \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2}{5} \langle \dfrac{1}{x+1} \langle \dfrac{2}{3}$.

التمرين رقم 8 : (الإستدلال بآستعمال مثال مضاد)

1) بين أن العبارة $(\forall x \in IR^*)\ ;\ x+\dfrac{1}{x} \geq 2$ خاطئة .

2) نعتبر الدالة f العددية المعرفة على IR بما يلي :

$$f(x)=2x^2-x+3$$

بين أ ن ليست زوجية و لا فردية .

3) لتكن a و b وc و d أعداد حقيقية .

بين أ ن العبارة $\begin{cases} a \neq b \\ c \neq d \end{cases} \Rightarrow a+c \neq b+d$ عبارة خاطئة .

التمرين رقم 9 : (الإستدلال بآستعمال الإستلزامات المتتالية)

1) ليكن x عددا حقيقيا .

بين أ ن : $2 \langle x \langle 4 \Rightarrow \dfrac{1}{3} \langle \dfrac{1}{x-1} \langle 1$

2) بين أن : $(\forall x \in IR^+)\ ;\ \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}=1-\sqrt{x} \Rightarrow x=0$

3) بين أ ن $(\forall (a,b) \in IR^2)\ ;\ a^2+b^2=0 \Rightarrow a=0$ و $b=0$

4) ليكن و عددين حقيقيين موجبين .

بين أ ن : $(x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}) \Rightarrow x=y=1$

التمرين رقم 10 : (الإستدلال الإستنتاجي)

1) ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a^2+b^2=1$

بين أن : $|a+b| \leq \sqrt{2}$.

2) ليكن a و x عنصرين من IR بحيث $|a| \rangle 1$ و $|x| \rangle 1$

أ – بين أ ن : $|ax^2+x-a| \langle |a||x^2-1|+|x|$

ب – آ ستنتج أ ن : $|ax^2+x-a| \langle -x^2+|x|+1$

ثم آستنتج أ ن : $|ax^2+x-a| \langle \dfrac{5}{4}$

تذكر أ ن $\left(x^2-Ax=\left(x-\dfrac{A^2}{2}\right)-\dfrac{A^2}{4}\right)$

التمرين رقم 11 : (الإستدلال بالخلف)

1) لتكن و و أ عداد حقيقية

بين أ ن النظمة : $\begin{cases} 2x-3z \rangle 3 \\ 3y-2x \geq 3 \\ y-z \leq 2 \end{cases}$ ليس لها حل .

2) بين أ ن : $\sqrt{6} \notin Q$ و $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin Q$.

3) ABCD متوازي الأضلاع مركزه O .

I منتصف $[AB]$ و J النقطة المعرفة بما يلي : $\overrightarrow{BJ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

أ – بين أ ن المستقيمين (AB) و (IJ) غير متوازيين .

ب - بين أ ن المستقيم (IJ) لا يمر من O .

التمرين رقم 12 : (الإستدلال بالترجع)

1) بين بالترجع أ ن لكل n من *IN :

أ) $1+2+3+\ldots+\mathrm{n}=\dfrac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)}{2}$

ب) $1^2+2^2+\ldots+\mathrm{n}^2=\dfrac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)(2\mathrm{n}+1)}{6}$

ج) $1^3+2^3+\ldots+\mathrm{n}^3=\left(\dfrac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)}{2}\right)^2$

2) بين أ ن : 9 يقسم $4^n+6n-1 \quad (\forall n \in IN^*)$

3) بين أ ن : 11 يقسم $3^{2n}+2^{6n-5} \quad (\forall n \in IN^*)$

مسألة رقم 1 :

يوجد على ضفة نهر ثلاثة أزواج و قارب و احد نريد تنظيم رحلات لنقل الأزواج إلى ضفة أ خرى بواسطة القارب الذي لا يسع لأكثر من شخصين دون السماح ببقاء زوجة مع رجل آخر في غياب زوجها . كيف السبيل إلى ذلك ؟

مسألة رقم 2 :

قدم أ حد التلاميذ بر هان على أ ن "2 = 1" على الشكل التالي :

(ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a=b$ إ ذن $a^2=ab$

و منه : $a^2+b^2-2ab=ab+b^2-2ab$

أ ي $(a-b)^2=b(a-b)$ إ ذن $a-b=b$ أ ي $a=2b$

و بما أ ن $a=b$ فإ ن $2=1$)

آ كتشف الخطأ الذي آ رتكبه هذا التلميذ .

مسألة رقم 3:

بينما قدمت تلميذة تحريرا آخر لكي تجد أ ن : .....$1=0,999$

(نعتبر العدد الحقيقي a بحيث ....$a=0,999$

إ ذن ...$10a=9,999$ و منه $10a-a=9$

إذن : $9a=9$ و بالتالي $a=1$ أ ي : ...$1=0,999$)

آ كتشف الخطأ الذي آرتكبته هذه التلميذة .