

التمرين 1:

عناصر الأجوبة:

1. العبارة $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ خاطئة بالطبع !

و إلا، يمكن كتابة $\sqrt{2}$ على شكل $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ بحيث a و b عدنان صحيحان طبيعيان أوليان فيما بينهما.

إذن $a^2 = 2b^2$ أي أن a عدد زوجي و نكتب $a = 2k$ بحيث k عدد صحيح طبيعي.

إذن $2b^2 = 4k^2$ أي $b^2 = 2k^2$.

إذن b هو أيضا عدد زوجي و نكتب $b = 2h$ بحيث h عدد صحيح طبيعي.

إذن a و b يقبلان القسمة على 2 و هذا تناقض مع كونهما عدنان أوليان فيما بينهما.

2. العدد 1419 يقبل القسمة على 11 عبارة صحيحة لأن

$$129 \times 11 = 1419$$

(لاحظ أن $11 = 1 - 1 + 4 - 1 + 9$. هناك أيضا برهان لقابلية قسمة عدد على 11 كما هو الشأن بالنسبة لقابلية القسمة على 3، فما هو هذا البرهان؟)

3. العدد 211 أولي عبارة صحيحة.

عدد أولي	p^2	خارج القسمة	باقي القسمة
p		q	r
2	4	105	1
3	9	70	1
5	25	42	1
7	49	30	1
11	121	19	2
13	169	16	3
17	289		

4. عبارة خاطئة باعتبار إشارتي

العديدين !

5. عبارة صحيحة $\frac{1}{\sqrt{97-56\sqrt{3}}} = 7+4\sqrt{3}$

(تحقق أولا من أن $97-56\sqrt{3}$ عدد موجب قطعاً، ثم ارفع العديدين إلى المربع و ...)

6. عبارة خاطئة $\sqrt{36-9\sqrt{5}} < \sqrt{9-5\sqrt{2}}$

(تحقق أولا من إشارة العديدين $9-5\sqrt{2}$ و $36-9\sqrt{5}$ ثم ارفعهما إلى المربع و ...)

التمرين 2:

عناصر الأجوبة:

مجموعة القيم x التي من أجلها تكون الدالة العبارية صحيحة هي مجموعة الحلول للمعادلة أو المتراجحة بحسب السؤال.

1. $\left\{-1; \frac{7}{2}\right\}$

2. $]-\infty; -1[\cup \left] \frac{-5}{7}; +\infty \right[$

3. $\left]3; \frac{9}{2}\right[$

4. $]-\infty; 3[\cup]3; 5[$ (احسب الفرق ثم أنشر و عمل للحصول على

$$(\dots)(x-5)(x-3)^2 < 0$$

التمرين 3:

عناصر الأجوبة:

1. العبارة المكمنة $(\forall x \in]-6; 3[: x^2 + 3x < 18)$ صحيحة

لأن $x^2 + 3x - 18 = (x-3)(x+6)$

2. العبارة المكمنة $(\forall x \in]4; +\infty[: x^2 + 2x > 24)$ صحيحة

لأن $x^2 + 2x - 24 = (x-4)(x+6)$

3. العبارة المكمنة $(\exists x \in \mathbb{R} / x^2 - x < 2)$ صحيحة (نأخذ

مثلاً $x = 0$)

4. العبارة المكمنة $(\exists x \in \mathbb{R} / \frac{1}{x} < 0.0625x)$ صحيحة (

نأخذ مثلاً $x = 100$)

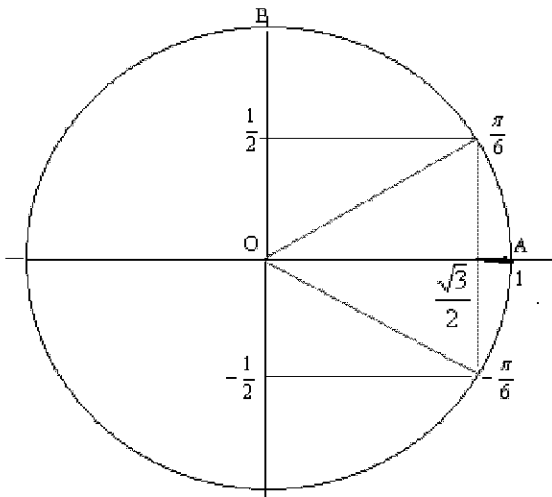
5.

6. العبارة المكمنة $(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 < 2|x|)$ خاطئة (خذ مثلاً

مضاداً مثلاً $x = 0$)

7. العبارة المكمنة $(\forall x \in \left] -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} \right[: 2\cos x > \sqrt{3})$ صحيحة

صحيحة



8. العبارة المكمنة $(\forall x \in \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right] : 2\sin x < 1)$ صحيحة

خاطئة أيضا باعتبار مثال مضاد،
 $(\forall n \in \mathbb{N}) : n^2 < n + 1000$
 (خذ مثلا $n = 1000$)

التمرين 7:

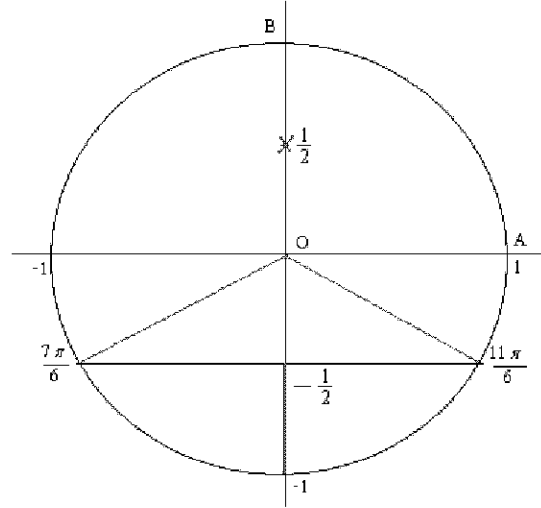
عناصر الأجوبة:

1. [$(\forall x \in \mathbb{R}) : x > 1 \Rightarrow x^2 > x$] عبارة صحيحة
2. [$(\forall x \in \mathbb{R}) : x < -2 \Rightarrow |x| < 2$] عبارة خاطئة (مثال مضاد: $x = -36$)
3. [$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x^2 > y^2 \Rightarrow x > y$] عبارة خاطئة (مثال مضاد: $x = -2$ و $y = -1$)
4. [$(\forall x \in \mathbb{R}) : x \leq -1 \Rightarrow (x+1)^2 \geq 0$] عبارة صحيحة
5. [$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$] عبارة خاطئة (مثال مضاد: $x = 1$ و $y = -1$)
6. [$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : |x| = |y| \Leftrightarrow (x = y \text{ أو } x = -y)$] عبارة صحيحة
7. [$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) : (0 < x < \alpha) \Rightarrow (1 < \sqrt{1+x} < 1 + \varepsilon)$] عبارة صحيحة (خذ مثلا $\alpha = \varepsilon$ أو أي عدد موجب قطعاً و أصغر من $2\varepsilon + \varepsilon^2$)

التمرين 8:

العبارات التالية صحيحة (راجع دفتر دروسك):

1. $(P \text{ و } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ و } P)$ (تبادلية و)
2. $(P \text{ أو } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ أو } P)$ (تبادلية أو)
3. $((P \text{ و } Q) \text{ و } R) \Leftrightarrow (P \text{ و } (Q \text{ و } R))$ (تجميعية و)
4. $((P \text{ أو } Q) \text{ أو } R) \Leftrightarrow (P \text{ أو } (Q \text{ أو } R))$ (تجميعية أو)
5. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow P)$ (تعريف تكافؤ عبارتين)
6. $(P \text{ و } (Q \text{ أو } R)) \Leftrightarrow (P \text{ و } Q) \text{ أو } (P \text{ و } R)$ (توزيعية و على أو)
7. $(P \text{ أو } (Q \text{ و } R)) \Leftrightarrow (P \text{ أو } Q) \text{ و } (P \text{ أو } R)$ (توزيعية أو على و)
8. $P \Rightarrow (P \text{ و } Q)$ (ننتقل من P و Q صحيحة و نستنتج P صحيحة).
9. $P \Rightarrow (Q \text{ أو } P)$ (ننتقل من P صحيحة و نستنتج $(Q \text{ أو } P)$ صحيحة).
10. $(P \Rightarrow Q) \text{ و } (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ (الاستلزام علاقة متعدية)
11. $(P \Rightarrow Q) \text{ و } (P \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (Q \text{ و } R))$ (نبيين الاستلزام المباشر ثم العكسي)
12. $(Q \Leftrightarrow R) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R))$ (للبرهنة على تكافؤ العبارتين $(P \Rightarrow R)$ و $(P \Rightarrow Q)$ نبيين الاستلزام المباشر ثم العكسي مع افتراض أن $(Q \Leftrightarrow R)$ عبارة صحيحة)
13. $(\overline{P} \text{ أو } \overline{Q}) \Leftrightarrow \overline{(P \text{ و } Q)}$ (قانون موركان)



التمرين 4:

1. العبارة المكتملة $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) / x \leq y$ صحيحة (خذ مثلا $y = x + 1$)
2. العبارة المكتملة $(\exists y \in \mathbb{R}) / (\forall x \in \mathbb{R}) : x \leq y$ خاطئة لأنها فيها $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : x > y$ عبارة صحيحة (خذ مثلا $x = y + 1$)

التمرين 5:

عناصر الأجوبة:

1. العبارة [$(\cos(\frac{38\pi}{3}) = -0.5)$ و $(\sin(\frac{28\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2})$] خاطئة، لأن $\sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin(\frac{\pi}{3})$ و $\sin(\frac{28\pi}{3}) = \sin(8\pi + \pi + \frac{\pi}{3})$
2. [$(\exists x \in \mathbb{R}) / \sqrt{x+1} = x - 1$ و $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + 1 > x$] عبارة صحيحة لكون كلتي العبارتين صحيحة (يمكن كتابة العبارة الأولى $(\forall x \in \mathbb{R}) : (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ و التحقق من أن للمعادلة $\sqrt{x+1} = x - 1$ حل حقيقي)

التمرين 6:

عناصر الأجوبة:

1. [$(\exists x \in \mathbb{R}) / \frac{1}{x} = x + 2$ و $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 > x$] عبارة صحيحة لكون إحدى العبارتين صحيحة (قم بحل المعادلة $(x \in \mathbb{R}) ; \frac{1}{x} = x + 2$)
2. [$(\exists n \in \mathbb{N}) / \frac{10}{n} = n + 2$ أو $(\forall n \in \mathbb{N}) : n^2 < n + 1000$] عبارة خاطئة لكون كلتي العبارتين خاطئة
 ($(\exists n \in \mathbb{N}) / \frac{10}{n} = n + 2$) خاطئة لأن 11 ليس مربعا كاملا و

$$(x > 0 \text{ و } y > 0 \text{ و } x^2 + y^2 = 4) \Rightarrow (2 \leq x + y \leq 2\sqrt{2}) \quad .3$$

$$(x \neq y \text{ و } x + y \neq 2) \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y \quad .4$$

$$\frac{x^2 + y^2}{2} = xy \Leftrightarrow x = y \quad .5$$

$$(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1 \Leftrightarrow x + y = 0 \quad .6$$

التمرين 12:

ليكن x و y من R بحيث $y \geq 4$ و $x \geq 1$ ، بين أن:

$$(2\sqrt{x-1} + 4\sqrt{y-4} = x + y) \Leftrightarrow (x = 2 \text{ و } y = 8)$$

التمرين 13:

ليكن x و y من R بحيث $x \neq y$ ، بين أن:

$$((x + y)^3 \leq 4x^3 + 4y^3) \Leftrightarrow (x + y \geq 0)$$

التمرين 14:

ليكن x و y عددين حقيقيين موجبين، بين أن:

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} \leq 2(x+y+1)$$

التمرين 15:

حل في R المعادلات التالية:

$$\sqrt{1+3x^2} = 2x \quad .1$$

$$\sqrt{5x-6} = -x \quad .2$$

$$\sqrt{-2-6x} = x-1 \quad .3$$

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{9-x} = x-2 \quad .4$$

$$E(3x+1) = 5x-1 \quad .5$$

$$|1+x| - |9-x| = x-2 \quad .6$$

التمرين 16:

حل في R المترجمات التالية:

$$\sqrt{1-x+x^2} > x-2 \quad .1$$

$$\sqrt{x^2-3x} > 2 \quad .2$$

$$\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2} > \sqrt{2}(|x|-1) \quad .3$$

التمرين 17:

بين أن العبارات التالية خاطئة:

1. لكل عدد طبيعي صحيح n ، العدد $2^n - 1$ يقبل القسمة على 3.

2. المستقيمان $(D): \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \end{cases}$ و $(\Delta): \begin{cases} x=3+2t \\ y=1-2t \end{cases}$ منطبقان.

$$\forall (x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 > 0 \quad .3$$

$$.14 \quad (\overline{P} \text{ و } \overline{Q}) \Leftrightarrow \overline{(P \text{ و } Q)} \text{ (قانون موركان)}$$

$$.15 \quad (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}) \text{ (الاستلزام المضاد للعكس، نستعمل تعريف الاستلزام ثم نفي النفي)}$$

التمرين 9:

عناصر الأجوبة:

1. نفي العبارة $(\forall x \in R : |x| \geq x)$ هو العبارة:

$(\exists x \in R / |x| < x)$ وهذه الأخيرة خاطئة لأن الأولى صحيحة

(تذكر تعريف القيمة المطلقة لعدد)

2. نفي العبارة $(\exists x \in R / \sin x = x)$ هو العبارة:

$(\forall x \in R : \sin x \neq x)$ وهذه الأخيرة خاطئة لأن الأولى

صحيحة (لا تنسى أن $\sin 0 = 0$)

3. نفي العبارة $(\forall x \in R : |x| = x \text{ أو } |x| = -x)$ هو العبارة:

$(\exists x \in R / |x| \neq x \text{ و } |x| \neq -x)$ وهذه الأخيرة خاطئة لأن

الأولى صحيحة (تذكر تعريف القيمة المطلقة لعدد)

4. نفي العبارة $(\exists x \in R / x^2 = x \text{ و } \sqrt{x} = -x)$ هو العبارة:

$(\forall x \in R : x^2 \neq x \text{ أو } \sqrt{x} \neq -x)$ وهذه الأخيرة خاطئة لأن

الأولى صحيحة (خذ $x = 0$)

5. نفي العبارة $(\exists x \in R / 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq x)$ هو

العبارة: $(\forall x \in R : 0 \leq x \leq 1 \text{ و } x^2 > x)$ وهذه الأخيرة

خاطئة لأن الأولى صحيحة (خذ مثلا $x = 0$)

في انتظار تحرير عناصر الإجابة للتمارين المتبقية...

التمرين 10:

ليكن x من R ، بين أن:

$$x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad .1$$

$$|x^2 + x - 2| > 10 \Rightarrow |x-1| > 2 \quad .2$$

$$x \neq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{|x|} > 0 \quad .3$$

$$x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} \neq 1 + \frac{x^2}{2} \quad .4$$

التمرين 11:

ليكن x و y من R ، بين أن:

$$1 + xy = x + y \Rightarrow (x=1 \text{ أو } y=1) \quad .1$$

$$(x > 1 \text{ و } y > 1 \text{ و } \frac{x}{1+x^2} = \frac{y}{1+y^2}) \Rightarrow x = y \quad .2$$

التمرين 18:

بين أن العبارات التالية صحيحة:

1. لكل عدد طبيعي صحيح n ، العدد $4^n + 6n - 1$ يقبل القسمة على 9.

2. لكل عدد طبيعي صحيح n ، العدد $n(n+8)(n+13)$ يقبل القسمة على 6.

3. لكل عدد طبيعي صحيح n ، العدد $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ يقبل القسمة على 7.

4. $(\forall n \in \mathbb{N}^*): 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

5. $(\forall n \in \mathbb{N}): 1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$

6. $(\forall n \in \mathbb{N}^*): 1 + 8 + 27 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

7. $(\forall n \in \mathbb{N}^*): \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

التمرين 19:

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعيا.

1. بين بالترجع أن: $(\forall n \in \mathbb{N}): (1+x)^n \geq 1+nx$

2. أستنتج أن: $(\forall n \in \mathbb{N}): (1+n)^n \geq 2n^n$

بالإضافة إلى التمارين و المسائل الواردة في " المفيد في الرياضيات " الآتية أرقامها: 7-10-11-14-21-38-43-44-60-63-65-67-82...