

الحدوديات

التمرين 1:

عمل الحدوديات التالية:

$$A(x) = \frac{25}{4}x^2 - 15x + 9 + (3x - 7)\left(\frac{5}{2}x - 3\right) - 5x + 6 \quad P(x) = (x^2 + 4x + 2)^2 - 4$$

$$B(x) = (\sqrt{3}x - 3)^2 - (7\sqrt{3}x^2 - 21x)$$

$$Q(x) = \left(\frac{9}{16}x^2 - 1\right)\left(2x + \frac{3}{5}\right) - \left(4x^2 - \frac{9}{25}\right)\left(\frac{3}{4}x + 1\right)$$

$$C(x) = x^4 + 16$$

$$K(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

$$D(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$H(x) = x^4 - x^2 - 12$$

التمرين 2:

هل الحدوديتان $P(x)$ و $Q(x)$ متساويتان في كل حالة من الحالات التالية؟ علل جوابك:

$$1) \quad P(x) = 2x^5 + 4x^3 - x^5 + x^2 - x + 2 \quad \text{و} \quad Q(x) = x^5 + x^2 + 2 + 4x^3 - x$$

$$2) \quad P(x) = \frac{1}{1+\sqrt{3}}x^5 + 4x^3 - x + 2 \quad \text{و} \quad Q(x) = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)x^5 + 2 + 4x^3 - x$$

$$3) \quad P(x) = 2x^2(x^3 + 2x) - x^5 + x^2 - x + 2 \quad \text{و} \quad Q(x) = x^5 + x^2 + 2 + 4x^3 + x$$

$$4) \quad P(x) = 4x^3 - x^5 + x^2 - x + 2 \quad \text{و} \quad Q(x) = x^5 + x^2 + 2 + 4x^3 - x$$

التمرين 3:

$$P(x) = (a-b)x^5 + (b+c)x^3 + (2a-c+1)x^2$$

حدد الأعداد الحقيقية a و b و c لكي تكون الحدودية $P(x)$ منعدمة.

التمرين 4:

حدد باقي و خارج القسمة الأقليدية لـ $P(x)$ على $Q(x)$ في كل حالة من الحالات التالية:

$$1) \quad P(x) = 2x^5 + 4x^3 + x^2 - x + 2 \quad \text{و} \quad Q(x) = x + 1$$

$$2) \quad P(x) = 2x^5 + 4x^3 + 5x^2 - x + 2 \quad \text{و} \quad Q(x) = x + 1$$

$$3) \quad P(x) = 2x^4 - 4x^3 + x^2 - x + 2 \quad \text{و} \quad Q(x) = x - 1$$

$$4) \quad P(x) = 3x^2 + 4x - 15 \quad \text{و} \quad Q(x) = x + 3$$

$$5) \quad P(x) = 4x^5 - 5x^3 + 2 \quad \text{و} \quad Q(x) = x - 2$$

التمرين 5:

نعتبر الحدودية $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

$$1) \quad \text{حدد من بين الأعداد } 1 \text{ و } (-2) \text{ و } (-3) \text{ و } 2 \text{ من يمثل جذرا للحدودية } P(x).$$

$$2) \quad \text{بين أنه توجد حدودية } Q(x) \text{ بحيث } P(x) = (x-2)Q(x), \text{ ثم حددها.}$$

(3)

أ- تأكد من أن (-3) جذر للحدودية $Q(x)$.

ب- عمل $P(x)$ إلى جداء حدانيات.

ت- حل في \mathbb{R} المتراجحة $P(x) \geq 0$.

التمرين 6:

نعتبر الحدودية $P(x) = -2x^3 - x^2 + 8x + 4$

$$1) \quad \text{بين أنه توجد ثلاثية الحدود } Q(x) \text{ بحيث } P(x) = (x+2)Q(x), \text{ ثم حددها.}$$

$$2) \quad \text{تأكد من أن } \left(-\frac{1}{2}\right) \text{ جذر للحدودية } Q(x).$$

(3) أكتب $P(x)$ على شكل جداء لحدانيات.

$$4) \quad \text{استنتج حلول المعادلة } -2x^3 - x^2 + 8x = -4 \text{ في } \mathbb{R}.$$

التمرين 7:

$$P(x) = x^3 + (\sqrt{7} - 1)x^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{7}\right)x - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

نعتبر الحدودية $P(x)$ بين أنه توجد ثلاثية الحدود $Q(x)$ بحيث $P(x) = (x-1)Q(x)$ ، ثم حددها.

التمرين 8:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

(1) بين أن الحدود $P(x)$ تقبل القسمة على $(x-1)$.

(2) استنتج كتابة $P(x)$ على شكل جداء لحدديات.

(3) حل في \mathbb{R} المتراجحة: $P(x) < 0$.

(4) نفترض أن $|x-2| < 10^{-2}$ أعط تائيرا للعدد $\sqrt{\frac{P(x)}{x+2}}$ سعته 2×10^{-2} .

التمرين 9:

$$P(x) = -x^4 + x^3 + 5x^2 - 3x - 6$$

(1) أحسب $P(2)$ و $P(-1)$ ثم استنتج تعميلا لـ $P(x)$.

(2) حل في \mathbb{R} المتراجحة: $P(x) \geq 0$.

(3) حل في \mathbb{R}^+ المعادلة: $-x^2 + x\sqrt{x} + 5x - 3\sqrt{x} - 6 = 0$.

(4) حل في \mathbb{R} المعادلة: $(x-2)^4 - (x-2)^3 - 5(x-2)^2 + 3(x-2) + 6 = 0$.

التمرين 10:

$$P(x) = 2x^6 - 7x^4 + 7x^2 - 2$$

(1) أحسب $P(\sqrt{2})$ و $P(1)$.

(2) a عدد حقيقي غير منعدم، بين أنه إذا كان a جدرا لـ $P(x)$ فإن $(-a)$ و $\frac{1}{a}$ جدرين لـ $P(x)$.

(3) استنتج تعميلا لـ $P(x)$ إلى حدانبات.

(4) حل في \mathbb{R} المتراجحة: $P(|x|) \geq 0$.

التمرين 11:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + x + 1$$

حدد a و b إذا علمت أن 1 و 2 جدرين لهذه الحدودية.

التمرين 12:

حدد ثلاثية الحدود $P(x)$ التي تحقق: $P(-1)=4$ و $P(1)=3$ و $P(2)=4$.

التمرين 13:

(1) حدد حدودية $P(x)$ من الدرجة الثانية بحيث $P(x+1) - P(x) = x$

ثم استنتج بدلالة n المجموع $S = 1+2+3+4+\dots+n$

(2) حدد حدودية $P(x)$ من الدرجة الثالثة بحيث $P(x+1) - P(x) = x^2$

ثم استنتج بدلالة n المجموع $S = 1+2^2+3^2+4^2+\dots+n^2$

(3) حدد حدودية $P(x)$ من الدرجة الرابعة بحيث $P(x+1) - P(x) = x^3$

ثم استنتج بدلالة n المجموع $S = 1+2^3+3^3+4^3+\dots+n^3$

التمرين 14:

حدد جميع الحدوديات $P(x)$ التي تحقق: $(x-8)P(2x) = 8(x-1)P(x)$ محددًا درجة هذه الحدودية.