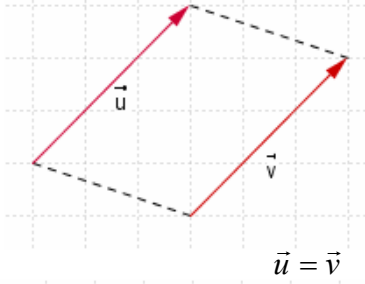


المتجهات في الفضاء

(I) - تساوي متجهتين - جمع المتجهات

1- عناصر متجهة

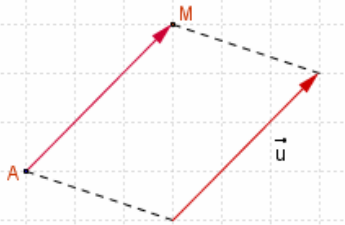
- A و B نقطتين مختلفتين من الفضاء، إذا رمزنا للمتجهة \overrightarrow{AB} بالرمز \vec{u} فان :
- اتجاه \vec{u} هو اتجاه المستقيم (AB)
 - منحى \vec{u} هو المنحى من A إلى B
 - منظم \vec{u} هي المسافة AB و نكتب: $AB = \|\vec{u}\|$
- ملحوظة:** لكل نقطة A من الفضاء المتجهة \overrightarrow{AA} ليس لها اتجاه و منظمها منعدم، $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ تسمى المتجهة المنعدمة و نكتب



2- تساوي متجهتين

تعريف

تكون متجهتان متساويتان إذا كان لهما نفس الاتجاه و نفس المنحى و نفس المنظم



لكل متجهة \vec{u} من الفضاء و لكل نقطة A في الفضاء توجد نقطة وحيدة M حيث $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$

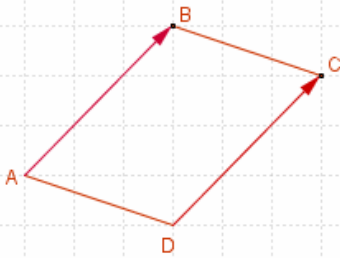
خاصية

$ABCD$ رباعيا في الفضاء

$ABCD$ متوازي الأضلاع إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

خاصية

لتكن A و B و C و D أربع نقط من الفضاء
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (تبديل الوسطين)
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA}$ (تبديل الطرفين)



3- مجموع متجهتين - علاقة شال

أ- \vec{u} و \vec{v} متجهتان في الفضاء

لتكن A نقطة من الفضاء،

توجد نقطة وحيدة B حيث $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

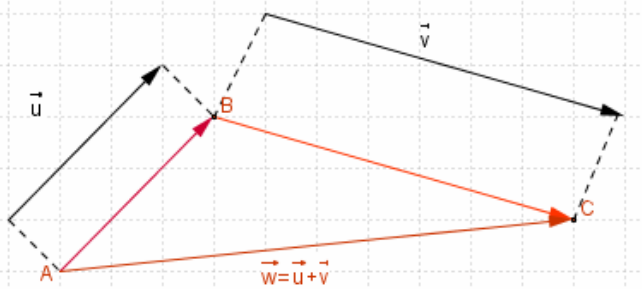
توجد نقطة وحيدة C حيث $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.

النقطتان A و C تحددان متجهة

وحيدة $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$

المتجهة \vec{w} هي مجموع المتجهتين \vec{u} و \vec{v}

نكتب $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$



ب- علاقة شال

مهما كانت النقط A و B و C من الفضاء

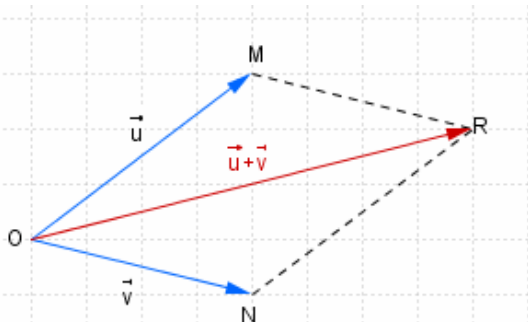
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

نتيجة

لتكن O و M و N و R أربع نقط من الفضاء
 $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OR}$ إذا وفقط إذا كان $OMRN$ متوازي الأضلاع

ملاحظة: إذا كانت $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$ فان

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OR}$ حيث $OMRN$ متوازي الأضلاع



ج- خاصيات

- *- لكل متجهين \vec{u} و \vec{v} $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- *- لكل ثلاث متجهات \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- *- لكل متجهة \vec{u} $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

مقابل متجهة - فرق متجهتين

أ- مقابل متجهة

لتكن \vec{u} متجهة غير منعدمة في الفضاء
مقابل المتجهة \vec{u} هي المتجهة التي لها نفس الاتجاه و نفس المنظم و منحائها مصاد لمنحى
المتجهة \vec{u} نرسم لها بالرمز $-\vec{u}$

- *- لكل متجهة \vec{u} : $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$
- * لكل نقطتين A و B من المستوى لدينا $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$
- المتجهتان \vec{AB} و \vec{BA} متقابلتان نكتب $\vec{AB} = -\vec{BA}$

ب- فرق متجهتين

تعريف

لكل متجهين \vec{u} و \vec{v} $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

ملاحظة لكل ثلاث نقط A و B و C $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$

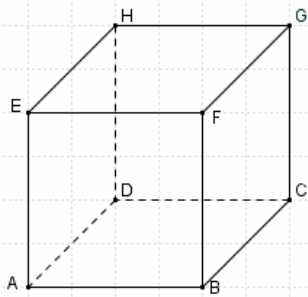
أمثلة

مكعب ABCDEFGH

$$\vec{ED} + \vec{EF} = \vec{EC} \quad \vec{BC} = -\vec{HE} \quad \vec{AB} = \vec{HG}$$

4- منتصف قطعة

I منتصف [AB] إذا وفقط إذا كان $\vec{AI} = \vec{IB}$ ($\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$)



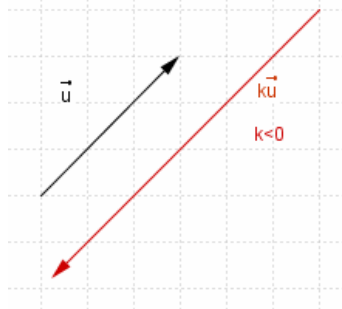
II الاستقامية- التعريف المتجهي للمستقيم

1- ضرب متجهة في عدد حقيقي

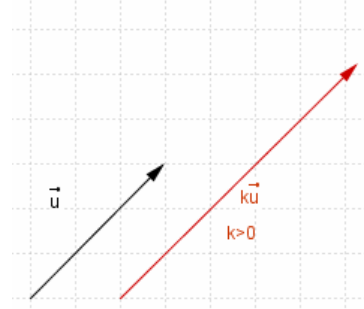
تعريف

\vec{u} متجهة غير منعدمة و k عدد حقيقي غير منعدم
جداء المتجهة \vec{u} في العدد الحقيقي k هي المتجهة $k\vec{u}$ حيث :
* \vec{u} و $k\vec{u}$ لهما نفس الاتجاه
* $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$

* منحى $k\vec{u}$ هو
← منحى \vec{u} إذا كان $k > 0$
← عكس منحى \vec{u} إذا كان $k < 0$



$k < 0$



$k > 0$

* لكل متجهة \vec{u} و لكل عدد حقيقي k : $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$ و $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$

2 - خاصيات

مهما تكن المتجهتان \vec{u} و \vec{v} و مهما يكن العددين الحقيقيين α و β فان

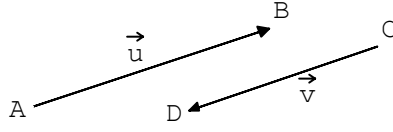
$$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u} \quad \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$$

$$(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u}) \quad 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$$

$\alpha\vec{u} = \vec{0}$ إذا وفقط إذا كان $\alpha = 0$ أو $\vec{u} = \vec{0}$

3- الاستقامية استقامية متجهتين أ- تعريف

تكون متجهتان \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين إذا و فقط كانت احدهما جداء الأخرى في عدد حقيقي



ملاحظة

$\vec{0}$ مستقيمة مع أية متجهة

استقامية ثلاث نقط

تعريف

لتكن $A \neq B$ و C و B و A نقاط من الفضاء حيث $\vec{AC} = \alpha \vec{AB}$ حيث α حقيقي
تكون النقط A و B و C مستقيمة إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي α حيث $\vec{AC} = \alpha \vec{AB}$

نوازي مستقيمين

لتكن $A \neq B$ و $C \neq D$ و A و B و C و D نقاط من الفضاء حيث $(AB) \parallel (CD)$ إذا و فقط إذا كان \vec{AB} و \vec{CD} مستقيمتين

التعريف المتجهي لمستقيم في الفضاء

تعريف

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من الفضاء
كل متجهة \vec{u} غير منعدمة و مستقيمة مع المتجهة \vec{AB}
تسمى متجهة موجهة للمستقيم (AB)

خاصية

لتكن A نقطة من الفضاء و \vec{u} متجهة غير منعدمة
مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\vec{AM} = \alpha \vec{u}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$
هي المستقيم المار من A و الموجه بـ \vec{u} . نرسم له بالرمز
 $D(A; \vec{u})$

$$D(A; \vec{u}) = \left\{ M \in (E) / \vec{AM} = \alpha \vec{u} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

تمرين

ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا نضع $\vec{AB} = \vec{i}$ و $\vec{AD} = \vec{j}$ و $\vec{AE} = \vec{k}$ و $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$. نعتبر I منتصف $[HG]$

1- بين أن \vec{u} موجهة للمستقيم (AI)

2- ليكن المستقيم (Δ) المار من G و الموازي للمستقيم (AI) و M نقطة من الفضاء حيث

$$M \in (\Delta) \text{ بين أن } \vec{BM} = \frac{1}{2} \vec{AB} + 2\vec{BG}$$

الجواب

1- نبين أن \vec{u} موجهة للمستقيم (AI)

أي نبين أن \vec{AI} و \vec{u} مستقيمتين

$$\vec{HI} = \frac{1}{2} \vec{HG} \text{ ومنه } [HG] \text{ منتصف } I$$

$$\vec{AI} = \vec{AE} + \vec{EH} + \vec{HI} = \vec{AE} + \vec{EH} + \frac{1}{2} \vec{HG}$$

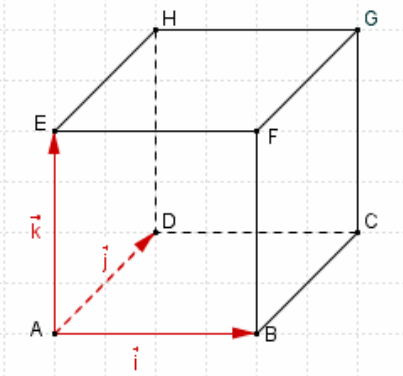
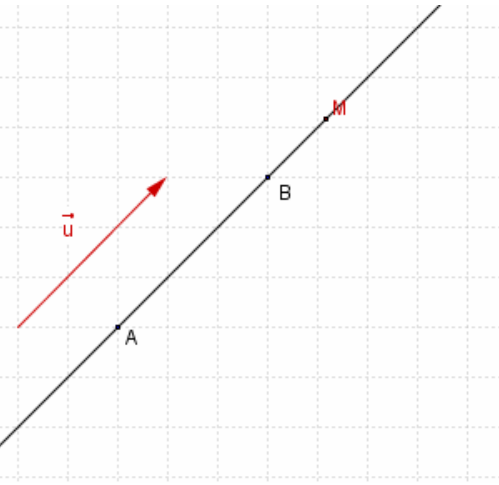
$$\text{بما أن } \vec{HG} = \vec{AB} = \vec{i} \text{ و } \vec{EH} = \vec{AD} = \vec{j} \text{ فمكعب } ABCDEFGH$$

$$\text{ومنه } \vec{AI} = \vec{k} + \vec{j} + \frac{1}{2} \vec{i} = \frac{1}{2} (\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}) = \frac{1}{2} \vec{u}$$

إذن \vec{AI} و \vec{u} مستقيمتان و منه \vec{u} موجهة للمستقيم (AI)

2 نبين أن $M \in (\Delta)$

لدينا (Δ) المار من G و الموازي للمستقيم (AI) أي $(\Delta) = D(G; \vec{u})$



$$\overline{GM} = \overline{GF} + \overline{FB} + \overline{BM} = \overline{GF} + \overline{FB} + \frac{1}{2}\overline{AB} + 2\overline{BG} = \overline{GF} + \overline{FB} + \frac{1}{2}\overline{AB} + 2\overline{BC} + 2\overline{CG}$$

بما أن $ABCEFGH$ مكعب فان $\overline{GF} = -\overline{AD} = -\vec{j}$ و $\overline{FB} = -\overline{AE} = -\vec{k}$ و $\overline{BC} = \vec{j}$ و $\overline{CG} = \vec{k}$ و $\overline{GM} = -\vec{j} - \vec{k} + \frac{1}{2}\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \frac{1}{2}(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) = \frac{1}{2}\vec{u}$

و بالتالي $M \in D(G; \vec{u})$ إذن $M \in (P)$

III الاستوائية- التعريف المتجهي للمستوى -1 تعريف

ليكن (P) مستوى من الفضاء و A و B و C نقط غير مستقيمة من المستوى (P)
نقول إن (P) هو المستوى المار من A و الموجه بالمتجهين \overline{AB} و \overline{AC}

نتيجة

متجهتان \vec{u} و \vec{v} غير مستقيمتين و نقطة من الفضاء تحدد مستوى وحيدا (P) هو المستوى المار من النقطة A و الموجه بالمتجهين \vec{u} و \vec{v} و نرسم له بالرمز $P(A; \vec{u}; \vec{v})$.

خاصية

لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهين غير مستقيمتين و A نقطة من الفضاء.
مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overline{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ و $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ هي المستوى (P) المار من A و الموجه بالمتجهين \vec{u} و \vec{v} و نكتب $(P) = P(A; \vec{u}; \vec{v})$

-2 الاستوائية تعريف

لتكن \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} ثلاث متجهات في الفضاء
نقول إن المتجهات \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} مستوائية إذا فقط وجدت أربع نقط مستوائية A و B و C و D حيث $\overline{AB} = \vec{u}$ و $\overline{AC} = \vec{v}$ و $\overline{AD} = \vec{w}$

أمثلة

$ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات

\overline{BE} و \overline{BC} و \overline{BH} مستوائية لان النقط B و C و E و H مستوائية $[(BC) \parallel (EH)]$

\overline{BE} و \overline{BH} و \overline{BD} غير مستوائية لأن $BDEH$ رباعي الأوجه

خاصية

لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهين غير مستقيمتين و \vec{w} متجهة في الفضاء
المتجهات \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} مستوائية إذا فقط إذا وجد عددين حقيقيين x و y حيث $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$

نتيجة

إذا وجد عددين حقيقيين x و y حيث $\overline{AM} = x\overline{AB} + y\overline{AC}$ فان M و C و B و A مستوائية

تمرين

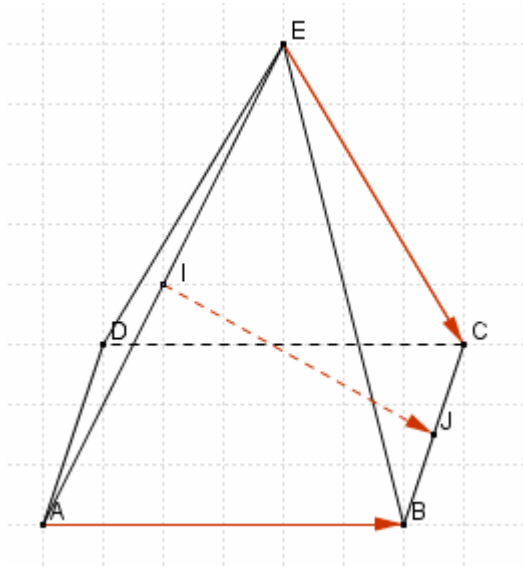
$EABCD$ هرم قاعدته المستطيل $ABCD$ ، I و J منتصفا $[AE]$ و $[BC]$ على التوالي.

بين أن المتجهات \overline{IJ} و \overline{AB} و \overline{EC} مستوائية

الحل

$$\overline{IJ} = \overline{IA} + \overline{AB} + \overline{BJ}$$

و حيث I و J منتصفا $[AE]$ و $[BC]$ فان :



$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \text{ و } \overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \text{ و بالتالي}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \text{ ومنه}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ ومنه}$$

إذن \overrightarrow{IJ} و \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{EC} مستوائية