التمارين الاختيارية في مادة الرياضيات
السنة الثالثة من التعليم الثانوي الاعدادي
المرحلة الثالثة إنجاز الأستاذ: محمد الفتحي

تمرين 1

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{a^3+b^3-ab^2-ba^2}{a^2b^2}=\frac{a^2(a-b)-b^2(a-b)}{a^2b^2}$$

$$=\frac{(a-b)(a^2-b^2)}{a^2b^2}=\frac{(a-b)(a-b)(a+b)}{a^2b^2}$$

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{(a-b)^2(a+b)}{a^2b^2}$$

لدينا $(a-b)^2\geq 0$ أي $a^2b^2>0$ ، $a>0$ ، $b>0$ ومنه $a+b>0$

إذن $\frac{(a-b)^2(a+b)}{a^2b^2}\geq 0$ ومنه $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\geq 0$

أي $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

تمرين 2

لدينا $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=7$

إذن $a+\frac{1}{a}=\sqrt{7}$ أو $a+\frac{1}{a}=-\sqrt{7}$

بما أن $a+\frac{1}{a}>0$

فإن $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=7$

بعبارة أخرى $a^2+2+\frac{1}{a^2}=7$

أي $a^2+\frac{1}{a^2}=5$

وبالتالي $a+\frac{1}{a}=\sqrt{7}$

إذن $\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)=5\sqrt{7}$

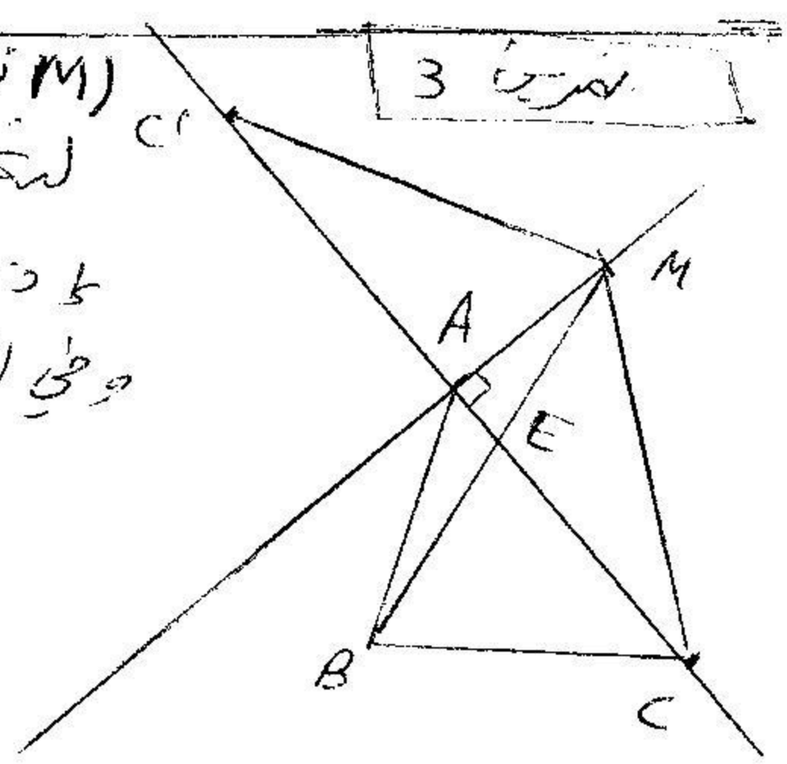
بعبارة أخرى $a^3+a+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^3}=5\sqrt{7}$

أي $a^3+\sqrt{7}+\frac{1}{a^3}=5\sqrt{7}$

وبالتالي

$$\boxed{a^3+\frac{1}{a^3}=4\sqrt{7}}$$

تمرين 3



(M تنتمي الى نصف المستوى الذي حافته (AC) ولا تحتوي على B)

لتكن E نقطة تقاطع (CC') و (AC)

بما أن في المثلث AEB لدينا $AB < AE + EB$

وفي المثلث MEC' لدينا $EC' < ME + MC'$

بالجمع $AB + EC' < AE + EB + ME + MC'$

$AB + EC' - AE < ME + EB + MC'$

$AB + AC' < MB + MC'$

$AE \in [EC]$ و $E \in [MB]$ لأن

وبما أن A و M تنتميان إلى $[CC']$ فإن $AC' = AC$ و $MC' = MC$

ومنه $AB + AC < MB + MC$ أي $AB + AC < MB + MC$

تمرين 4

$\frac{1}{\sqrt{n}} - 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \frac{1 - 2\sqrt{n}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})}{\sqrt{n}}$ لدينا

$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2\sqrt{n}\sqrt{n+1} - 2n - 1}{\sqrt{n}}$ أي $\frac{1}{\sqrt{n}} - 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \frac{1 - 2n + 2\sqrt{n-1}\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{-(n+1 - 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} + n)}{\sqrt{n}}$ أي $\frac{1}{\sqrt{n}} - 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \frac{-(n - 1 - 2\sqrt{n-1}\sqrt{n} + n)}{\sqrt{n}}$

$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - \frac{1}{\sqrt{n}} = -\frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2}{\sqrt{n}}$ أي $\frac{1}{\sqrt{n}} - 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = -\frac{(\sqrt{n-1} - \sqrt{n})^2}{\sqrt{n}}$

$-\frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2}{\sqrt{n}} \leq 0$ أي $-\frac{(\sqrt{n-1} - \sqrt{n})^2}{\sqrt{n}} \leq 0$

$2\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ أي $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$

$\boxed{2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})}$

من أجل $n = 1$ نجد $2(\sqrt{2} - \sqrt{1}) \leq 1 \leq 2(\sqrt{1})$

من أجل $n = 2$ نجد $2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \leq 2(\sqrt{2} - \sqrt{1})$

من أجل $n = 3$ نجد $2(\sqrt{4} - \sqrt{3}) \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \leq 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

⋮

من أجل $n = 9999$ نجد $2(\sqrt{10000} - \sqrt{9999}) \leq \frac{1}{\sqrt{9999}} \leq 2(\sqrt{9999} - \sqrt{9998})$

من أجل $n = 10000$ نجد $2(\sqrt{10001} - \sqrt{10000}) \leq \frac{1}{\sqrt{10000}} \leq 2(\sqrt{10000} - \sqrt{9999})$

بجمع الأطراف نجد

$2(\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{10000} - \sqrt{9999} + \sqrt{10001} - \sqrt{10000}) \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{9999}} + \frac{1}{\sqrt{10000}} \leq 2(\sqrt{1} + \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{9999} - \sqrt{9998} + \sqrt{10000} - \sqrt{9999})$

أي

$\boxed{2(\sqrt{10001} - 1) \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}} \leq 200}$

وبالتالي