

## الاشتقاق و تطبيقاته

1 ع رياضيات الدرس 1 الدورة الثانية 12 ساعة	القدرات المنتظرة $x_0$ $x_0$
1 ع تجريبية الدرس 3 الدورة الثانية 10 ساعات	

**1- الاشتقاق في نقطة  
أ/ نشاط**

بينت تجربة الفيزياء هند السقوط الحر لجسم بدن سرعة بدئية أي  $v_0 = 0$  في اللحظة  $t = 0$  تكون حركته متغيرة بانتظام و محددة بالدالة الزمنية  $d = f(t) = 5t^2$  حيث  $t$  هي المدة بالثانية و  $d = f(t)$  المسافة بالتر  
-1 بين أن السرعة المتوسطة بين اللحظتين  $t$  و  $t+h$  حيث  $h \neq 0$  و  $t+h > 0$  هي  $10t + 5h$   
-2 نضع  $t = 0,5s$   
أ/ أملئ الجدول التالي

0,01	0,001	0,0001	-0,0001	-0,001	-0,01	$h$
						$t+h$
						السرعة المتوسطة بين $t$ و $t+h$

ب/ باستعمال الجدول تضن نهاية السرعة المتوسطة عندما يؤول  $h$  الى 0

ج/ أحسب  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,5+h) - f(0,5)}{h}$  ثم قارنها مع نتيجة ب

العدد  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,5+h) - f(0,5)}{h}$  يسمى السرعة اللحظية للجسم عند اللحظة  $t = 0,5s$

و يسمى أيضا العدد المشتق للدالة  $f$  عي النقطة  $t_0 = 0,5$

نكتب في هذه الحالة  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,5+h) - f(0,5)}{h} = f'(0,5)$

**ب- تعريف**

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة في مجال مفتوح  $I$  و  $x_0$  عنصرا من  $I$

نقول إن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  اذا وجد عدد حقيقي  $l$  حيث  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = l$  ونرمز لها.

العدد  $l$  يسمى العدد المشتق لـ  $f$  في  $x_0$  ونرمز له بـ  $f'(x_0)$ .

نكتب  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

**ملاحظة:**  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

**مثال:** نعتبر  $f(x) = x^2 + 2x$

بين أن  $f$  قابلة للاشتقاق في 1 و حدد العدد المشتق في 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 3 = 4$$

إذن  $f$  قابلة للاشتقاق في 1 و  $f'(1) = 4$

### **(ج) الدالة التآلفية المماسية لدالة**

لتكن  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0, \quad \varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \quad \text{نضع} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \Leftrightarrow f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad / \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

أي أنه بجوار  $x_0$  لدينا  $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

الدالة  $x \rightarrow f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  تسمى الدالة التآلفية المماسية لدالة  $f$  في النقطة  $x_0$

### **تعريف**

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة في مجال مفتوح مركزه  $x_0$

إذا كانت الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  فان الدالة التآلفية المماسية لدالة  $f$  في النقطة  $x_0$

هي الدالة  $g : x \rightarrow f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

**تمرين** نعتبر  $f(x) = \sqrt{x}$

(1) حدد الدالة التآلفية المماسية لدالة  $f$  في النقطة 1

(2) استنتج قيمة مقربة لكل من  $\sqrt{0,99}$  و  $\sqrt{1,001}$

### **الجواب**

$$/1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

ومنه الدالة التآلفية المماسية لدالة  $f$  في النقطة 1 هي الدالة  $g : x \rightarrow \frac{1}{2}(x - 1) + 1$

أي  $g : x \rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

لدينا  $1 \approx 0,99$  ومنه  $\sqrt{0,99} = f(0,99) \approx g(0,99) = 0,5 \times 0,99 + 0,5 = \dots$

لدينا  $1 \approx 1,001$  ومنه  $\sqrt{1,001} = f(1,001) \approx g(1,001) = 0,5 \times 1,001 + 0,5 = \dots$

### **2 - الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار**

#### **أ- تعريف**

\* لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال من شكل  $[x_0; x_0 + \alpha]$  حيث  $\alpha > 0$

نقول إن  $f$  قابلة للاشتقاق على اليمين في  $x_0$  إذا كانت للدالة  $x \rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  نهاية  $l$  على

الييمين في  $x_0$  و نرمل لها بـ  $f'_d(x_0)$ .

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{نكتب} \quad x_0 \text{ على اليمين في } f$$

\* لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال من شكل  $[x_0 - \alpha; x_0]$  حيث  $\alpha > 0$

نقول إن  $f$  قابلة للاشتقاق على اليسار في  $x_0$  إذا كانت للدالة  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$  نهاية أعلى اليسار في  $x_0$  نرسم لها ب  $f'_g(x_0)$ .

العدد  $l$  يسمى العدد المشتق ل  $f$  على اليسار في  $x_0$  نكتب  $f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ملاحظة

$$f'_g(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ و } f'_d(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ب - خاصية

تكون  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  إذا وفقط إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في  $x_0$  والعدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار.

**تمرين** نعتبر  $f(x) = x^2 + |x|$  أدرس قابلية اشتقاق  $f$  في 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x+1=1$$

اذن  $f$  قابلة للاشتقاق على يمين 0 و  $f'_d(0) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x-1=-1$$

اذن  $f$  قابلة للاشتقاق على يسار 0 و  $f'_g(0) = -1$

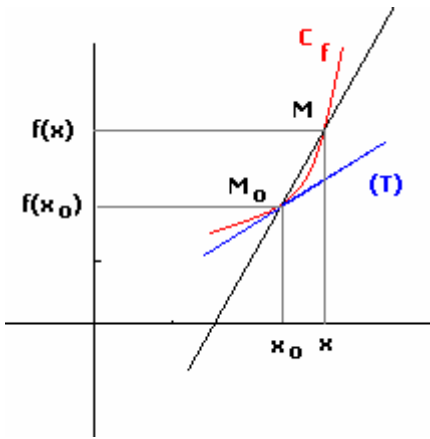
لدينا  $f'_d(0) \neq f'_g(0)$  ومنه  $f$  قابلة للاشتقاق في 0

#### 4- التأويل الهندسي - معادلة المماس لمنحنى دالة

أ- المماس

لتكن  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  و  $C_f$  منحناها

نعتبر  $M_0(x_0; f(x_0))$  و  $M(x; f(x))$  نقطتين من  $C_f$



المعامل الموجه للمستقيم  $(MM_0)$  هو  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

نلاحظ عندما تقترب  $M$  من  $M_0$  (أي  $x$  تتوّل إلى  $x_0$ ) فإن  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$  تتوّل إلى  $f'(x_0)$

و بالتالي المستقيم  $(MM_0)$  يدور حول  $M_0$  إلى أن ينطبق مع المستقيم  $(T)$  ذا المعامل الموجه  $f'(x_0)$

المستقيم  $(T)$  مماس للمنحنى  $C_f$

معادلة  $(T)$  هي  $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

خاصية

لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه  $x_0$  و  $C_f$  منحناها

قابلية اشتقاق  $f$  في  $x_0$  تتوّل هندسيا بوجود مماس ل  $C_f$  عند النقطة ذات الأفصول  $x_0$

معادلته  $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

**تمرين:** نعتبر  $f(x) = x^3$

أدرس قابلية اشتقاق  $f$  في 2 و حدد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة ذات الأفصول 2

الجواب

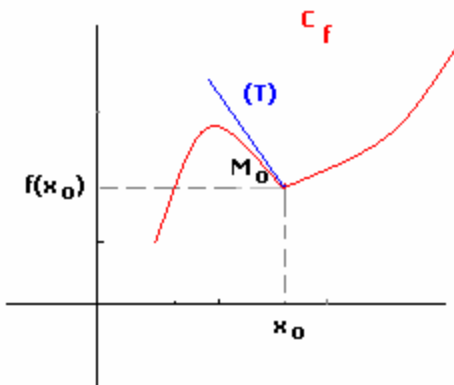
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2x + 4 = 12$$

اذن  $f$  قابلة للاشتقاق في 2 و  $f'(2) = 12$

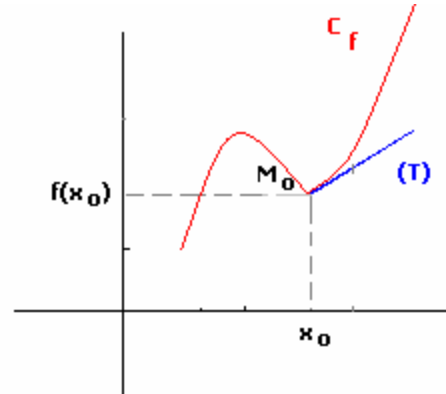
ومنه معادلة المماس هي  $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$  أي  $y = 12(x - 2) + 8$

$$y = 12x - 16$$

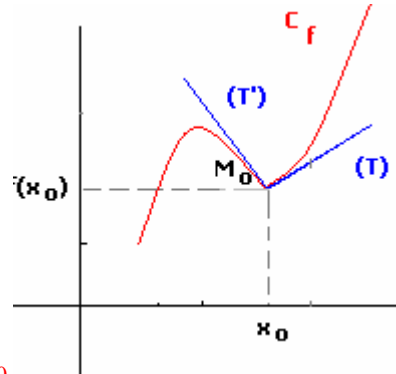
### ب- نصف المماس



$$\begin{cases} (T): y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} (T): y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$$



**نقطة مزواة  $M_0$**

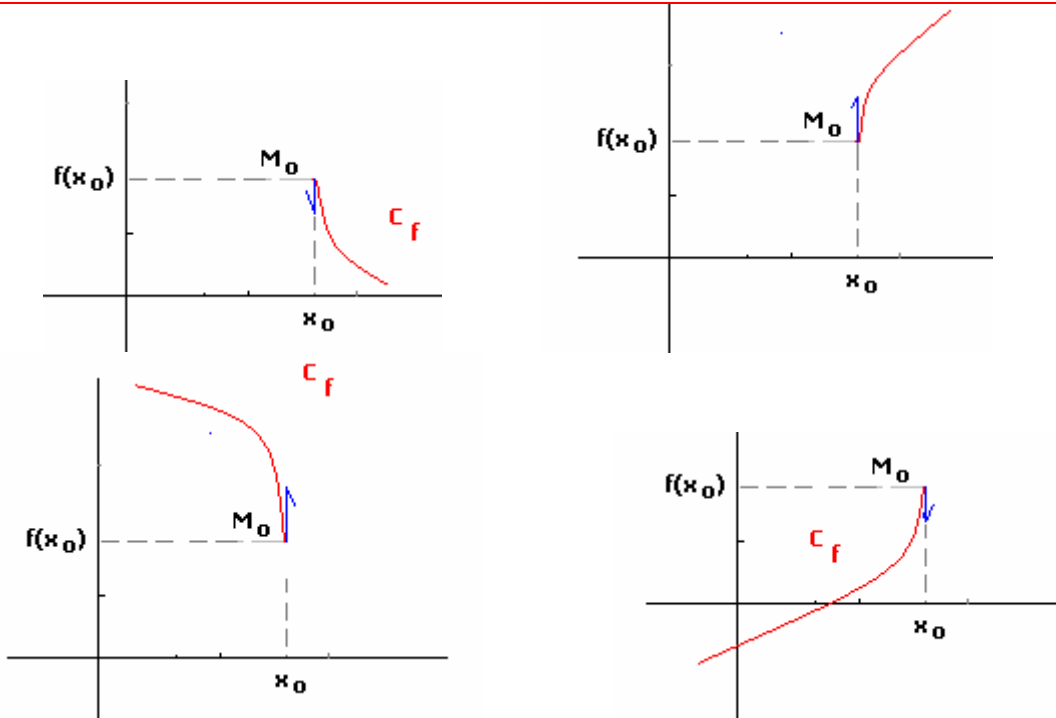
$$\begin{cases} (T): y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) & x \geq x_0 \\ (T'): y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) & x \leq x_0 \end{cases}$$

### خاصة

إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق على اليمين في  $x_0$  (أو على اليسار في  $x_0$ ) فان  $C_f$  يقبل

نصف مماس عند النقطة ذات الأفصول  $x_0$  معامله الموجه  $f'_d(x_0)$  (أو  $f'_g(x_0)$ )

إذا كانت نهاية  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$  هي  $f'_{\pm\infty}$  في  $x_0$  (على اليمين في  $x_0$  أو على اليسار في  $x_0$ ) فإن  $C_f$  يقبل مماس عمودي عند النقطة ذات الاصول  $x_0$  ( نصف مماس عمودي عند النقطة ذات الاصول  $x_0$  )



**تمرين** نعتبر  $f(x) = |x^2 - 1|$  و  $g(x) = \sqrt{x}$

أدرس قابلية اشتقاق  $f$  على يمين ويسار 1 و أول النتائج هندسيا  
أدرس قابلية اشتقاق  $g$  على يمين 0 و أول النتيجة هندسيا

الجواب

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 2 *$$

ومنه  $f$  قابلة اشتقاق على يمين 1 و  $f'_d(1) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -x - 1 = -2$$

ومنه  $f$  قابلة اشتقاق على يسار 1 و  $f'_g(1) = -2$

نلاحظ  $f'_d(1) \neq f'_g(1)$  اذن  $f$  غير قابلة للاشتقاق في 1

$(C_f)$  يقبل نصف مماس على يمين 1 معادلته  $y = 2(x - 1)$ .

$(C_f)$  يقبل نصف مماس على يسار 1 معادلته  $y = -2(x - 1)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty *$$

ومنه  $f$  غير قابلة للاشتقاق على يمين 0 و  $(C_g)$  يقبل نصف مماس عمودي على يمين 0

## 5- الدالة المشتقة

### أ- تعاريف

#### تعريف 1

نقول إن  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح  $I$  إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق في كل نقطة من  $I$ .

#### تعريف 2

نقول إن  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[a; b]$  إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]a; b[$  وعلى يمين  $a$  وعلى يسار  $b$ .

**ملاحظة:** بالمثل نعرف الاشتقاق على  $]a; b[$  و على  $[a; b]$

#### تعريف 3

لتكن قابلة للاشتقاق على المجال  $I$   
الدالة التي تربط كل عنصر  $x$  من  $I$  بالعدد  $f'(x)$  تسمى الدالة المشتقة نرملها بـ  $f'$ .

**مثال:** نعتبر  $f(x) = x^2$

ندرس قابلية اشتقاق  $f$  ونحدد الدالة المشتقة

ليكن  $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = 2x_0 \text{ و } x_0 \text{ ومنه قابلة للاشتقاق في } x_0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} x + x_0 = 2x_0$$

اذن  $f$  قابلة للاشتقاق في  $\mathbb{R}$  و  $f'(x) = 2x \forall x \in \mathbb{R}$

**ملاحظة:**

يكون للمنحنى الممثل لدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح  $I$  مماس عند كل نقطة

من هذا المنحنى

### ب- المشتقة الثانية - المشتقات المتتالية

لتكن  $f$  قابلة للاشتقاق مجال  $I$

إذا الدالة  $f'$  قابلة للاشتقاق المجال  $I$  فان دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية و نرملها بالرمز  $f''$

إذا كانت  $f''$  قابلة للاشتقاق المجال  $I$  فان دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثالثة أو

المشتقة من الرتبة 3 و نرملها بالرمز  $f'''$  أو  $f^{(3)}$

و هكذا .....

نرمل للدالة المشتقة من الرتبة  $n$  حيث  $n \in \mathbb{N}^*$  بالرمز  $f^{(n)}$

**مثال:** نعتبر  $f(x) = x^2$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = 2 \text{ و } \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x$$

### 6- عمليات على الدوال المشتقة

\*- لتكن  $f$  و  $g$  دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال  $I$  و  $\lambda \in \mathbb{R}$  و  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

$f + g$  و  $f \times g$  و  $\lambda f$  و  $f^n$  دوال قابلة للاشتقاق على المجال  $I$

و اذا كانت  $g$  لا تنعدم على  $I$  فان  $\frac{f}{g}$  و  $\frac{1}{g}$  قابلتان للاشتقاق على المجال  $I$

$$\forall x \in I \quad (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(\lambda f)' = \lambda f'(x)$$

$$\forall x \in I \text{ بحيث } g \text{ لا تنعدم} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

على I

\*- لتكن  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  و  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

$$\forall x \in I \quad (f^n)'(x) = n(f(x))^{n-1} \times f'(x) \quad (\text{نبين ذلك بالترجع})$$

نبرهن  $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$\begin{aligned} (f \times g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) \end{aligned}$$

و حيث  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$  و  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$  و  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$

فان  $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

### 7- الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية

\* الدالة الثابتة:  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = k$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 0$  و  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  إذن  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$   
\* الدالة  $f: x \rightarrow x$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1$  و  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  إذن  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$   
\* الدالة  $f: x \rightarrow ax + b$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = a$  و  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  إذن  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$   
\* الدالة  $f: x \rightarrow x^n$   $n \in \mathbb{N}^*$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = nx^{n-1}$  و  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و  $(x^n)' = nx^{n-1}$   
\* الدالة  $f: x \rightarrow \frac{1}{x}$

إذن  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}^*$   $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1}{x \times x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$

و  $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

\* الدالة  $f: x \rightarrow \sqrt{x}$  لتكن  $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = -\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

إذن  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}_+^*$  و  $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f$  غير قابلة للاشتقاق في 0

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2 \cos(x_0 + h)) \times 2 \times \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x_0 \end{aligned}$$

إذن

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin'(x) = \cos x \quad \text{و} \quad \mathbb{R} \text{ قابلة للاشتقاق على}$$

\* الدالة  $f: x \rightarrow \cos x$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos'(x) = -\sin x \quad \text{و} \quad \mathbb{R} \text{ قابلة للاشتقاق على}$$

\* الدالة  $f: x \rightarrow \tan x$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ \tan' x &= \frac{(\sin x)'(\cos x) - (\sin x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x} \\ \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan' x &= 1 + \tan^2 x \quad \text{إذن} \end{aligned}$$

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad x \rightarrow \tan x \text{ قابلة للاشتقاق في كل نقطة من}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan' x = 1 + \tan^2 x \quad \text{و}$$

**نتائج**

\* الدالة الحدودية قابلة للاشتقاق في  $\mathbb{R}$

\* الدالة الجدرية قابلة للاشتقاق في كل نقطة من حيز تعريفها

أمثلة

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x}{x^2 + x - 2} \quad \text{نعتبر}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{1; -2\}$$

$f$  الدالة الجدرية ومنه  $f$  قابلة للاشتقاق في كل نقطة من  $\mathbb{R} - \{1; -2\}$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1; -2\} \quad f'(x) = \frac{(3x^2 - 3)(x^2 + x - 2) - (2x + 1)(2x^3 - 3x)}{(x^2 + x - 2)^2} = \dots \quad \text{و}$$

**8- مشتقة  $f(ax+b)$  - مشتقة  $\sqrt{f}$**

**مبرهنة**

ليكن المجال  $J$  صورة المجال  $I$  بالدالة التألفية  $x \rightarrow ax+b$  إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق على  $J$  فان  $g: x \rightarrow f(ax+b)$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و

$$\forall x \in I \quad g'(x) = af'(ax+b)$$

$$f(x) = \sin\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{مثال: نعتبر}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 5 \cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{و} \quad \mathbb{R} \text{ قابلة للاشتقاق على}$$

**خاصة**



لتكن  $f$  دالة موجبة قطعاً و قابلة للاشتقاق على مجال  $I$

$$\forall x \in I \quad (\sqrt{f})'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \text{ و } \sqrt{f} \text{ قابلة للاشتقاق على } I$$

مثال: نعتبر  $f(x) = \sqrt{-x^2 + x}$

$$D_f = [0;1]$$

دالة موجبة قطعاً و قابلة للاشتقاق على مجال  $]0;1[$

$$\forall x \in ]0;1[ \quad f'(x) = \frac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2+x}} \text{ و } f \text{ قابلة للاشتقاق على } ]0;1[$$

### جدول مشتقات بعض الدوال

$D_{f'}$	$f'(x)$	$f(x)$
$\mathbb{R}$	0	$a$
$\mathbb{R}$	1	$x$
$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$nx^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad x^n$
$\mathbb{R}^*$	$nx^{n-1}$	$n \in \mathbb{Z}^{*-} \quad x^n$
$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\cos x$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$
$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$	$1 + \tan^2 x$	$\tan x$
$\mathbb{R}$	$-a \sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
$\mathbb{R}$	$a \cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$

### تمارين

1- أدرس اشتقاق  $f$  و حدد الدالة المشتقة في الحالات التالية:

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-x} * \quad f(x) = \frac{3x-1}{2x-2} * \quad f(x) = \frac{5}{x^2} * \quad f(x) = 5x^4 + 3x^2 + 4 *$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x - \sin x} * \quad f(x) = (\cos x)^5 * \quad f(x) = (x^2 + x)^5 *$$

$$f(x) = x^2 + x|x| * \quad \begin{cases} f(x) = x^2 + x & x \leq 0 \\ f(x) = x^3 - x^2 & x > 0 \end{cases} *$$

$$2- \text{ نعتبر } f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$$

أ- بين أن منحنى  $f$  يقبل مماسين موازيين للمستقيم الذي معادلته  $y = -3x$

ب- أكتب معادلتين هذين المماسين.

### 9- تطبيقات الدالة المشتقة

#### a- قابلية الاشتقاق و المطراف

لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال مفتوح  $I$  و  $x_0 \in I$   
 نعتبر  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  و تقبل مطرافا في  $x_0$   
 لنفترض أن  $f$  تقبل قيمة قصوى نسبية عند  $x_0$

ومنه يوجد مجال مفتوح  $J$  مركزه  $x_0$  ضمن  $I$  حيث  $\forall x \in J \quad f(x) \leq f(x_0)$   
 $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  ومنه  $f'(x_0) = f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ أي}$$

و حيث  $\forall x \in J \quad f(x) \leq f(x_0)$  فان  $\forall x \geq x_0 \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$  و  $\forall x \leq x_0 \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$   
 ومنه  $f_g'(x_0) \geq 0$  ;  $f_d'(x_0) \leq 0$  أي أن  $f'(x_0) \geq 0$  ;  $f'(x_0) \leq 0$  اذن  $f'(x_0) = 0$   
 ( إذا كانت  $f$  تقبل قيمة دنيا نسبية عند  $x_0$  نتبع نفس الخطوات للحصول على نفس النتائج )

### مبرهنة

لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال فتوح  $I$  و  $x_0 \in I$   
 اذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق في النقطة  $x_0$  و تقبل مطرافا في النقطة  $x_0$  فان  $f'(x_0) = 0$

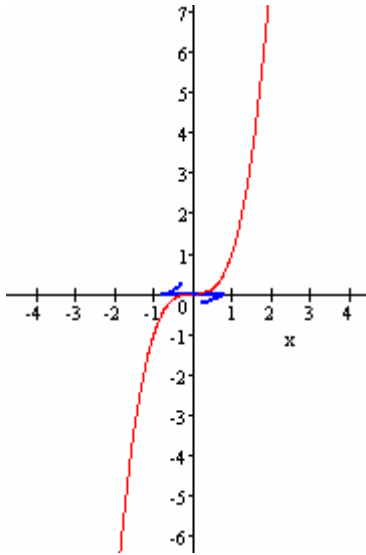
### ملاحظة:

المبرهنة لا تقبل المبرهنة العكسية

$$\text{مثال } f(x) = x^3 \quad ; \quad x_0 = 0$$

$f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0 = 0$  و  $f'(0) = 0$

و مع ذلك  $f$  لا تقبل مطرافا عند 0



### b- الاشتقاق ورتابة دالة

### مبرهنة

لتكن  $f$  قابلة للاشتقاق على مجال  $I$   
 تكون  $f$  تزايدية (قطعا) على  $I$  إذا فقط اذا كانت الدالة المشتقة  $f'$  موجبة على  $I$   
 أي  $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$  ( $f'$  موجبة قطعا على  $I$  أي  $\forall x \in I \quad f'(x) > 0$ )  
 تكون  $f$  تناقصية (قطعا) على  $I$  اذا فقط إذا كانت الدالة المشتقة  $f'$  سالبة على  $I$   
 أي  $\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$  ( $f'$  سالبة قطعا على  $I$  أي  $\forall x \in I \quad f'(x) < 0$ )  
 تكون  $f$  ثابتة على  $I$  إذا كانت الدالة المشتقة  $f'$  منعدمة على  $I$  أي  $\forall x \in I \quad f'(x) = 0$

### مثال

$$\text{نعتبر } f(x) = x^3 - 6x + 1$$

أدرس تغيرات  $f$  و أعط جدول تغيرات  $f$  ( في جدول التغيرات يجب تحديد النهايات )  
 حدد مطاريف  $f$  ان وجدت

### الجواب

$$* \text{ مجموعة تعريف } D_f = \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = (x^3)' - (6x)' + (1)' = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2) \text{ ومنه } f(x) = x^3 - 6x + 1 *$$

اشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $x^2 - 2$

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$x^2 - 2$	+	0	-	0	+

ومنه  $f'$  موجبة على كل  $[\sqrt{2}; +\infty[$  و  $]-\infty; -\sqrt{2}]$  و سالبة على  $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$   
ومنه  $f$  تزايدية على كل  $[\sqrt{2}; +\infty[$  و  $]-\infty; -\sqrt{2}]$  و تناقصية على  $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$   
جدول التغيرات

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f$	$-\infty$		$10\sqrt{2} + 1$		$-4\sqrt{2} + 1$	$+\infty$

من خلا جدول التغيرات نستنتج أن  $f$  تقبل قيمة قصوى عند  $-\sqrt{2}$  و دنيا عند  $\sqrt{2}$   
**ملاحظة** لتكن  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$

$f$  تقبل مطرافا في  $x_0$  إذا و فقط إذا كانت  $f'$  تنعدم في  $x_0$  و تتغير إشارتها في مجال مفتوح يحتوي على  $x_0$

### 10- المعادلة التفاضلية $y'' + \omega^2 y = 0$

تؤدي دراسة بعض الظواهر الفيزيائية و البيولوجية و الاقتصادية و غيرها إلى معادلات يكون فيها  
المجهول دالة و تحتوي على مشتقة أو مشتقات هذه الدالة.

هذا النوع من المعادلات يسمى المعادلات التفاضلية

#### تعريف

ليكن  $\omega$  عددا حقيقيا غير منعدم  
المعادلة  $y'' + \omega^2 y = 0$  تسمى معادلة تفاضلية.  
كل دالة  $f$  قابلة للاشتقاق مرتين على  $\mathbb{R}$  و تحقق  $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  تسمى حلا  
للمعادلة  $y'' + \omega^2 y = 0$

أمثلة  $y'' + 4y = 0$  و  $y'' + \sqrt{2}y = 0$  و  $y'' + \frac{3}{2}y = 0$  معادلات تفاضلية

#### خاصية

ليكن  $\omega$  عددا حقيقيا غير منعدم  
الحل العام للمعادلة  $y'' + \omega^2 y = 0$  هو مجموعة الدوال  $y$  المعرفة كما يلي  $x \rightarrow \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$   
حيث  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

#### ملاحظة

حل المعادلة  $y'' + \omega^2 y = 0$  يرجع إلى تحديد الحل العام لهذه المعادلة

#### مثال

حل المعادلة  $y'' + 4y = 0$

لدينا  $\omega^2 = 4$  ومنه  $\omega = 2$  يمكن أخذ  $\omega = -2$  هذا لن يغير مجموعة الحلول  
الحل العام لهذه المعادلة هو مجموعة الدوال  $y: x \rightarrow \alpha \cos 2x + \beta \sin 2x$  حيث  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

#### معادلة تفاضلية خاصة

حل المعادلة  $y'' = 0$

إذا كان  $y'' = 0$  فان  $y'$  دالة ثابتة ومنه الحل العام لهذه المعادلة هو مجموعة الدوال  $y: x \rightarrow ax + b$   
حيث  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$