

مذكرة رقم : 3
الأستاذ : عثمانى نجيب

المادة : الرياضيات

أكاديمية الجهة الشرقية
نيابة وجدة

مذكرة رقم 3 في درس الاحتمالات

مستوى: السنة الثانية من سلك البكالوريا

- شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
- شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- التجارب العشوائية؛ - استقرار تردد حدث عشوائي؛	- تصور المحاكاة Simulation المناسبة حسب التجربة العشوائية المعنية وتطبيقها؛	- ينبغي تجنب أي تقديم نظري لمفهوم الاحتمال؛ - من خلال إعادة تجربة عشوائية بسيطة عددا كبيرا من المرات (رمي قطعة نقدية، سحب كرة من كيس، ...) نثبت استقرار تردد حدث عشوائي ثم تقبل هذه النتيجة؛ ويمكن استعمال الملمس rand من الآلة الحاسبة العلمية أو الآلة الحاسبة العلمية القابلة للبرمجة أو البرام المندمجة في الحاسوب لهذه الغاية؛
- احتمال حدث؛	- حساب احتمال اتحاد حدثين؛	- ينبغي الانطلاق من وضعيات ملموسة ومتدرجة تجعل التلميذ يتدرب تدريجيا على وصف تجارب عشوائية باستعمال لغة الاحتمال؛ - يقدم احتمال حدث انطلاقا من استقرار تردد حدث عشوائي؛ - يعتبر الاحتمال الشرطي واستقلالية حدثين والمتغيرات العشوائية خارج المقرر - يعزز تقديم مفاهيم الاحتمالات بأتملة متنوعة تغطي مختلف الحالات الممكنة؛ - يطبق الاحتمال في وضعيات متنوعة ذات الارتباط بمواد التخصص؛
- احتمال حدثين غير منسجمين؛ - الحدث المضاد؛ - اتحاد و تقاطع حدثين؛ - فرضية تساوي الاحتمالات؛	- حساب احتمال تقاطع حدثين؛ - حساب احتمال الحدث المضاد لحدث؛ - استعمال النموذج التعدادي المناسب حسب الوضعية المدروسة؛	

I. تذكير

تمرين 1: السحب بإحلال- الترتيبات بتكرار:

يحتوي كيس على 12 كرة مرقمة من 1 إلى 12 (كل كرة تحمل رقما) نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال ثلاث كرات من الكيس.

(يعني نسحب كرة نسجل رقمها ثم نعيدها إلى الصندوق نكرر هذه العملية ثلاث مرات متتالية).

1. ما عدد النتائج الممكنة؟

2. ما عدد السحبات التي نحصل فيها على ثلاثة أعداد كلها قابلة للقسمة على 3؟

3. ما عدد السحبات التي نحصل فيها على ثلاثة أعداد كلها فردية و كلها قابلة للقسمة على 3؟

تمرين 2: السحب بدون إحلال- الترتيبات بدون تكرار

يحتوي صندوق على 16 ببيدقة: 4 حمراء و 7 بيضاء و 5 سوداء. نسحب عشوائيا بالتتابع، و بدون إحلال، أربع بيدقات من الصندوق (يعني نسحب ببيدقة نسجل لونها و لا نعيدها إلى الصندوق). نكرر هذه العملية أربع مرات).

1. ما عدد النتائج الممكنة؟

2. ما عدد السحبات التي نحصل فيها على أربع بيدقات كلها بيضاء؟

3. ما عدد السحبات التي نحصل فيها على ببيدقة بيضاء في السحبة الأولى فقط؟

تمرين 3: التبديلات

ما عدد الكلمات من ستة حروف لها معنى أو لا ، و التي يمكن كتابتهما باستعمال جميع حروف الكلمة " المغرب "

تمرين 4: السحب تائيا- التآليفات

يحتوي صندوق على إحدى عشرة كرة: 4 بيضاء و 5 سوداء و كرتان زرقاوان. نسحب عشوائيا و تائيا ثلاث كرات من الصندوق (يعني سحب ثلاث كرات في آن واحد).

1. ما عدد النتائج الممكنة؟

2. ما عدد السحبات التي نحصل فيها على ثلاث كرات من نفس اللون؟

3. ما عدد السحبات التي نحصل فيها على كرتين بيضاوين بالضبط؟

II. تجربة عشوائية- مصطلحات:

تجربة عشوائية: نسمي تجربة عشوائية كل تجربة لا يمكن توقع نتائجها مسبقاً.
إمكانية: كل نتيجة لتجربة عشوائية تسمى إمكانية.

كون الإمكانيات: مجموعة كل الإمكانيات لتجربة عشوائية تسمى كون الإمكانيات و نرسم لها بالرمز Ω , و تسمى أيضا الحدث الأكيد.

الحدث: كل مجموعة مكونة من إمكانية أو أكثر (أي كل جزء من الكون Ω) تسمى حدثاً.

الحدث $A \cap B$ و الحدث $A \cup B$: الحدث $A \cap B$ هو الحدث A و B , الحدث $A \cup B$ هو الحدث A أو B .

الحدث المضاد: الحدث المضاد لحدث A هو الحدث B الذي يحقق:

$$A \cap B = \phi \text{ و } A \cup B = \Omega \text{ نرسم لهذا الحدث بالرمز } \bar{A} \text{ و لدينا: } B = \bar{A}$$

الحدث الابتدائي: كل حدث يحتوي على إمكانية واحدة يسمى حدثاً ابتدائياً.

مثال: رمي نرد مكعب و جوهه الستة مرقمة من 1 إلى 6 واحدة هو تجربة عشوائية و كون الإمكانيات المرتبط بهذه التجربة

$$\text{هو: } \Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

III. استقرار تردد حدث احتمال حدث:

مثال: رمينا نردا مكعبا (جوهه الستة مرقمة من 1 الى 6) 1000 مرة و حصلنا على الترددات التالية:

الرقم	1	2	3	4	5	6
تردد الرقم	0,160	0,162	0,171	0,166	0,167	0,174

▪ تردد رقم 4 هو $0,166 = \frac{166}{1000}$, أي أن النرد عين 166 مرة الرقم 4 خلال 1000 رمية.

لدينا: $\left(\frac{1}{6} \approx 0,1666\dots\right)$ تردد الرقم 4 يستقر حول العدد $\frac{1}{6}$, نقول إن احتمال الحصول على الرقم 4 هو $\frac{1}{6}$.

و نكتب: $p(\{4\}) = \frac{1}{6}$. (نلاحظ أن ترددات الأرقام الأخرى قريبة أيضا من العدد $\frac{1}{6}$).

▪ نعتبر الحدث A "الحصول على عدد زوجي" يعني: $A = \{2; 4; 6\}$, لدينا تردد الحدث A هو مجموع ترددات كل من

الأرقام 2 و 4 و 6, أي: $0,162 + 0,166 + 0,174 = 0,502$, نقول إن احتمال الحدث A هو 0,502, و نكتب

$$P(A) = 0,502$$

لدينا: $0,5 = \frac{3}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$, و $P(A) \approx 0,5$, و هو ما يفسر استقرار تردد الحدث A .

خاصية:

ليكن Ω كون إمكانية تجربة عشوائية,

$$0 \leq p(A) \leq 1, \text{ لكل حدث } A, \quad p(\phi) = 0 \quad p(\Omega) = 1$$

لكل حدثين غير منسجمين A و B (أي $A \cap B = \phi$), $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$,

لكل حدث A , $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$, لكل حدثين A و B , $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

تمرين 5: A و B حدثان مرتبطان بنفس التجربة العشوائية بحيث:

$$p(A) = 0,7 \text{ و } p(B) = 0,4 \text{ و } p(A \cap B) = 0,3$$

أحسب: $p(\bar{A})$ و $p(\bar{B})$ و $p(A \cup B)$

تمرين 6: في إحدى الثانويات التأهيلية, 54% من التلاميذ يمارسون كرة القدم, و 32% يمارسون كرة السلة, و 13% يمارسون كرة القدم و كرة السلة.

صادفنا أحد تلاميذ هذه الثانوية و سألناه عن الرياضة التي يمارسها. أحسب احتمال كل حدث من الأحداث التالية:

A "التلميذ يمارس الرياضتين معا".

C "التلميذ يمارس إحدى الرياضتين على الأقل".

E "التلميذ لا يمارس كرة القدم و لا كرة السلة".

IV. فرضية تساوي الاحتمالات:

خاصية: إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال في تجربة عشوائية كون إمكانيتها Ω , فإن احتمال كل حدث A هو:

$$p(A) = \frac{A}{\Omega} = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega}$$

تمرين 7: نرمي نردا غير مزيف أوجهه الستة مرقمة من 1 إلى 6 مرة واحدة .

1. حدد فضاء الإمكانيات Ω وحدد عدد الإمكانيات $\text{card}(\Omega)$

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" ظهور الرقم 4 " A

" ظهور رقم فردي " B

" ظهور رقم زوجي " C

" ظهور الرقم 8 " D

" ظهور رقم أكبر قطعا من 1 " E

" ظهور رقم أصغر قطعا من 9 " F

تمرين 8: نرمي نردا أوجهه الستة مرقمة من 1 إلى 6 مرتين متتاليتين

1. حدد شجرة الإمكانيات

2. حدد فضاء الإمكانيات Ω وحدد عدد الإمكانيات $\text{card}(\Omega)$

3. حدد احتمال الأحداث التالية :

" ظهور الرقم 4 مرة واحدة فقط " A

" ظهور رقمين متساويين " B

تمرين 9: يحتوي كيس غير كاشف على أربع كرات مرقمة من 1 إلى 4 ونسحب عشوائيا من الكيس كرة واحدة

1. حدد فضاء الإمكانيات Ω وحدد عدد الإمكانيات $(\text{card}(\Omega))$

2. حدد كل الأحداث الابتدائية في هذه التجربة

3. حدد احتمال الأحداث التالية :

" الحصول على كرة تحمل الرقم 1 " A

" الحصول على كرة تحمل الرقم 3 " B

" الحصول على كرة تحمل رقما زوجيا " C

" الحصول على كرة تحمل رقما فرديا " D

" الحصول على عدد قابل للقسمة على 3 " E

" عدم الحصول على عدد قابل للقسمة على 3 " F

تمرين 10: يحتوي صندوق غير كاشف على 5 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء و كرتين حمراوتين

نسحب عشوائيا من الصندوق كرة واحدة

1. حدد $\text{card}(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب كرة بيضاء " B

" سحب كرة سوداء " N

" سحب كرة حمراء " R

" عدم سحب كرة سوداء " D

تمرين 11: يحتوي صندوق غير كاشف على 6 أقراص مرقمة : 1, 1, 1, 2, 2, 3.

نسحب عشوائيا من الصندوق قرصا واحدا

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب قرص يحمل الرقم 1 " A

" سحب قرص يحمل الرقم 2 " B

" سحب قرص يحمل الرقم 3 " C

" سحب قرص يحمل رقم فردي " D

" سحب قرص لا يحمل الرقم 1 " E

تمرين 12: يحتوي صندوق غير كاشف على أقراص مرقمة :

قرصان منهم يحملان الرقم 1 و ثلاث أقراص منهم يحملون الرقم 2 و خمسة أقراص تحمل الرقم 4

نسحب عشوائيا من الصندوق قرصا واحدا

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب قرص يحمل الرقم 1 " A

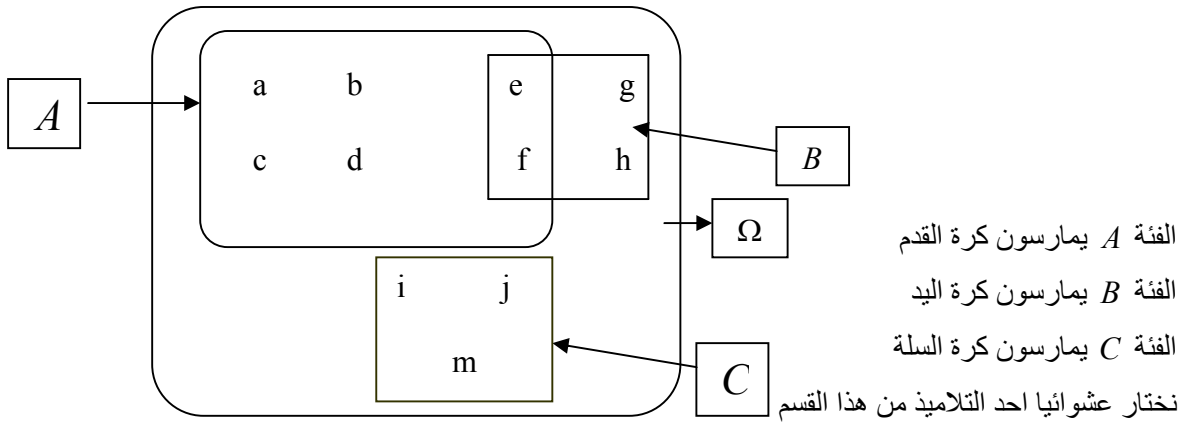
" سحب قرص يحمل الرقم 3 " B

" سحب قرص يحمل رقم زوجي " C

" سحب رقم أصغر من أو يساوي 2 " D

" سحب قرص لا يحمل الرقم 1 " E

تمرين 13 : الخطاطة جانبه تبين توزيع تلاميذ أحد الأقسام حسب الممارسة الرياضية :



1. أكتب A و B و C و Ω و $A \cap B$ و $A \cup B$ و $A \cap C$ و $A \cup C$ بالتفصيل

2. أحسب : $P(A)$ و $P(B)$ و $P(C)$ و $P(A \cap B)$ و $P(A \cup B)$ و $P(A \cap C)$ و $P(A \cup C)$

3. تحقق أن : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4. تحقق أن : $P(A \cup C) = P(A) + P(C)$

تمرين 14 :

1. أحسب : $4!$ و $5!$ و $7!$

2. أحسب : C_4^2 و C_5^2 و C_7^4 و C_{12}^3

3. أحسب : A_4^2 و A_5^3 و A_7^4

4. أحسب و بسط : $\frac{10 \times 5!}{6 \times 8!}$ و $\frac{A_6^3 \times A_{10}^4}{A_{10}^5}$

تمرين 15 : يحتوي صندوق غير كاشف على 4 كرات بيضاء و 6 كرات حمراء و 8 كرات سوداء و كرتين صفراوين

نسحب عشوائيا كرتين من الصندوق في آن واحد

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب كرتين بيضاوين " B

" سحب كرتين سوداوين " N

" سحب كرتين حمراوين " R

" سحب كرتين صفراوين " J

" سحب كرتين من نفس اللون " M

" سحب كرتين من لون مختلف " D

" الحصول على كرة سوداء و كرة بيضاء " E

تمرين 16 :

يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 5 كرات حمراء

نسحب عشوائيا كرتين من الصندوق في آن واحد

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب كرتين بيضاوين " B

" سحب كرتين حمراوين " R

" سحب كرتين من نفس اللون " M

" سحب كرتين من لون مختلف " D

تمرين 17 : يحتوي صندوق غير كاشف على 4 كرات بيضاء و 5 كرات حمراء و 3 كرات سوداء

نسحب عشوائيا ثلاث كرات من الصندوق في آن واحد

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب ثلاث كرات بيضاء " B

" سحب ثلاث كرات سوداء " N

" سحب ثلاث كرات حمراء " R

" سحب ثلاث كرات من لون مختلف " D

" سحب ثلاث كرات من نفس اللون " M

تمرين 18 : يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق :

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب كرتين بيضاوين " B

" سحب كرتين سوداوين " N

" سحب كرتين من نفس اللون " M

" سحب كرتين من لون مختلف " D

تمرين 19 : يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء نسحب عشوائيا بالتتابع وبإحلال كرتين من الصندوق :

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب كرتين بيضاوين " B

" سحب كرتين سوداوين " N

" سحب كرتين من نفس اللون " M

" سحب كرتين من لون مختلف " D