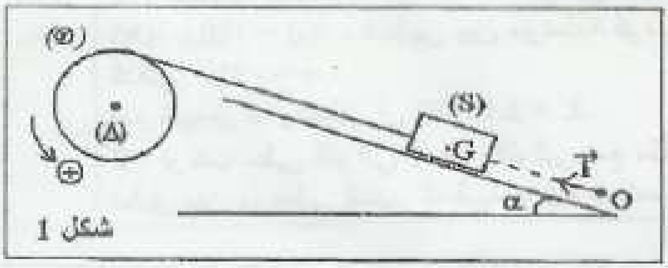
موضوع البكالوريا في الميكانيك لدورة يونيو 2007/ 2008

موضوع شعبة العلوم التجريبية:الإمتحان الوطني

التمرين 1 (5,5 نقط)

نهمل جميع الاحتكاكات و نأخذ $g = 10\ m.s^{-2}$.



1- نعتبر قرصا متجانسا (D) ، شعاعه $r = 10cm$ ، قابلا للدوران حول محور أفقي ثابت (Δ) منطبق مع محور تماثله. نلف حول القرص خيطا، غير قابل للامتداد، كتلته مهملة و لا ينزلق على القرص، ونثبت بطرفه الحر جسما صلبا (S) كتلته $m=0,5kg$.

الجسم (S) قابل للانزلاق على سطح مائل بالزاوية $\alpha = 30°$ بالنسبة للمستوى الأفقي (شكل1).

نطبق، بواسطة محرك، على القرص (D) مزدوجة محركة عزمها $\mathcal{M}$ ثابت، فينطلق مركز القصور G للجسم (S) بدون سرعة من الموضع O لينتقل وفق المحور $(O,\vec{i})$ بتسارع ثابت $a = 2\ m.s^{-2}$.

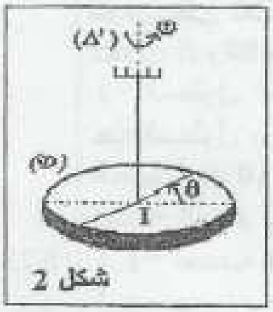
1.1- حدد طبيعة حركة كل من الجسم (S) و القرص (D) .

1.2- اكتب المعادلة الزمنية $x(t)$ لحركة G باتخاذ الموضع O أصلا للأفاصيل و اللحظة التي تأخذ فيها سرعة (S) القيمة $1m.s^{-1}$ أصلا للتواريخ.

1.3- احسب عند اللحظة $t = 0,5\ s$ التسارع المماسي a_T و التسارع المنظمي a_N لنقطة من محيط القرص.

1.4- أوجد قيمة العزم $\mathcal{M}$ للمزدوجة المحركة.

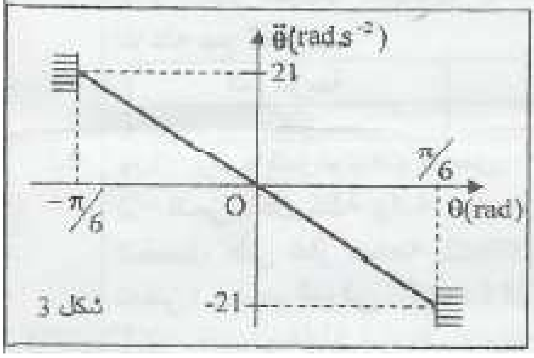
عزم قصور القرص بالنسبة للمحور (Δ) هو $J_\Delta = 9.10^{-3}\ kg.m^2$.



2- نأخذ القرص (D) و نثبت في مركزه I سلك لي رأسي، كتلته مهملة وثابتة ليه C فنحصل على متذبذب (شكل2).

ندير القرص (D) بزاوية θ_m ، انطلاقا من موضع التوازن $(\theta = 0)$ حيث السلك غير ملتو، ثم نحرر القرص بدون سرعة بدئية، فينجز حركة تذبذبية حول محور رأسي (Δ') منطبق مع محور السلك. عزم قصور القرص بالنسبة للمحور (Δ') هو $J_{\Delta'} = 9.10^{-3}\ kg.m^2$.

نعتبر موضع التوازن حالة مرجعية لطاقة وضع اللي $(E_p = 0)$.



2.1- اعتمادا على الدراسة الطاقية، أثبت المعادلة التفاضلية لحركة القرص (D).

2.2- يمثل منحنى الشكل3 تغيرات التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ للقرص بدلالة الأفصول الزاوي θ .

أوجد، اعتمادا على المبيان، قيمة كل من الوسع θ_m والنبض الخاص ω_0 لحركة المتذبذب و استنتج قيمة ثابتة اللي C .

2.3- احسب الطاقة الميكانيكية للمتذبذب. نأخذ $\pi^2 = 10$.

التصحيح

الفيزياء

التمرين 1

1) 1-1: حركة الجسم S مستقيمية متغيرة بانتظام متسارعة نحو الأعلى.
وحركة القرص دورانية متغيرة بانتظام .

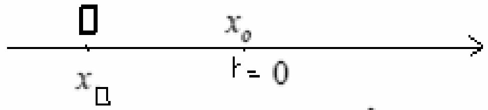
1-2: المعادلة الزمنية لحركة G تكتب كما يلي :

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

مع : $a = 2m/s^2$ و $v_o = 1m/s$ من خلال المعطيات لدينا : الجسم ينطلق بدون سرعة من □ اصل المعلم $v_□ = 0$

بتطبيق العلاقة المستقلة عن الزمن بين □ و النقطة المطابقة لاصل التواريخ .

$$v_o^2 - v_□^2 = 2a.(x_o - x_□) \Leftarrow v_o^2 = 2.a.x_o$$ ومنه:



$$x_o = \frac{v_o^2}{2a} = \frac{1}{2\times 2} = 0,25m$$

إذن: $\underline{x = t^2 + t + 0,25}$

1-3: من خلال دالة السرعة : $v = at + v_o$ التي تكتب كما يلي : $v = 2t + 1$

لدينا : $\frac{dv}{dt} = 2$

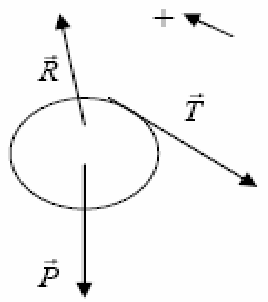
إذن: التسارع المماسي: $a_T = \frac{dv}{dt} = 2m/s^2$

وفي اللحظة $t = 0,5s$ تكون قيمة السرعة : $v = 2\times 0,5 + 1 = 2m/s$

إذن التسارع المظمي : $a_N = \frac{v^2}{r} = \frac{2^2}{0,1} = 40m/s^2$

1-4: بتطبيق العلاقة الاساسية للديناميك على كل من البكرة والجسم S لدينا :

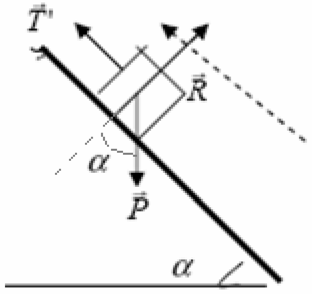
بالنسبة للبكرة : $\sum M_\Delta \vec{F} = J_\Delta.\ddot{\theta}$



$$M_\Delta \vec{P} + M_\Delta \vec{R} + M_\Delta \vec{T} + \mathrm{M} = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

لأن العزم محرك $O + O - T.r + \mathrm{M} = J_\Delta.\ddot{\theta}$

ومنه: $\mathrm{M} = J_\Delta.\frac{a}{r} + T.r \quad (1)$ لأن: $a = r.\ddot{\theta}$



وبالنسبة للجسم S لدينا $\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}_G$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T}' = m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على ox: $-P.\sin\alpha + o + T' = m..a$

الخيط غير قابل للمد $T' = T$

ومنه

$$T = m(g.\sin\alpha + a) = 0,5\times(10\times 0,5 + 2) = 3,5N$$

وبالتعويض في العلاقة (1) لدينا :

$$\mathrm{M} = J_\Delta.\frac{a}{r} + T.r = 9\times 10^{-2}\times\frac{2}{0,1} + 3,5\times 0,1 = 0,53N.m$$

---

2) 2-1:

$E_M = Ec + Ep$ أي : $E_M = \frac{1}{2}c.\theta^2 + \frac{1}{2}J_\Delta.\dot{\theta}^2 = Cte$

$\frac{dE_M}{dt} = \frac{1}{2}.c\times 2\theta\dot{\theta} + \frac{1}{2}J_\Delta\times 2.\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$ ومنه : $J_\Delta.\ddot{\theta} + C\theta = 0$

أي: $\ddot{\theta}+\frac{C}{J_\Delta}\theta=0$ المعادلة التفاضلية للحركة ونبضها الخاص : $\omega_0^{\,2}=\frac{C}{J_\Delta}$

وأخيرا المعادلة التفاضلية تصبح :

$$\ddot{\theta}+\omega_0^{\,2}.\theta=0$$

2-2: مبيانيا لدينا : $\theta_m=\frac{\pi}{6}$

والمنحنى الممثل لتغيرات $\ddot{\theta}$ بدلالة θ عبارة عن دالة خطية معاملها الموجه

$$k=\frac{\Delta\ddot{\theta}}{\Delta\theta}=\frac{21-0}{-\frac{\pi}{6}-0}=-\frac{21\times 6}{\pi}\approx -40$$

إذن معادلته : $\ddot{\theta}=-40\theta \qquad (a)$

ومن خلال المعادلة التفاضلية السابقة لدينا : $\ddot{\theta}=-\omega_0^{\,2}\theta \qquad (b)$

من خلال (a) و (b) : $\omega_0^{\,2}=40$ وبالتالي: النبض الخاص $\omega_0=\sqrt{40}\approx 6{,}33rad/s$

وثابتة اللي : $C=J_\Delta\omega_0^{\,2}=9\times 10^{-3}\times 40=0{,}36.N.m/rad$

2-3: الطاقة الميكانيكية للمتذبذب : $E_M=\frac{1}{2}c\theta_m^{\,2}=0{,}5\times 0{,}36\times\frac{\pi^2}{36}=0{,}5\times 0{,}36\times\frac{10}{36}=0{,}05J$

موضوع الامتحان الوطني في الميكانيك لدورة يونيو علوم رياضية2007

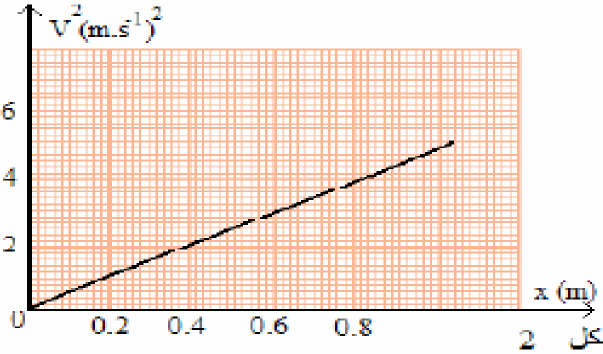
التمرين -1 (5.5 نقط)

نهمل جميع الاحتكاكات و نأخذ $g=10m.s^{-2}$ و $\pi^2=10$.

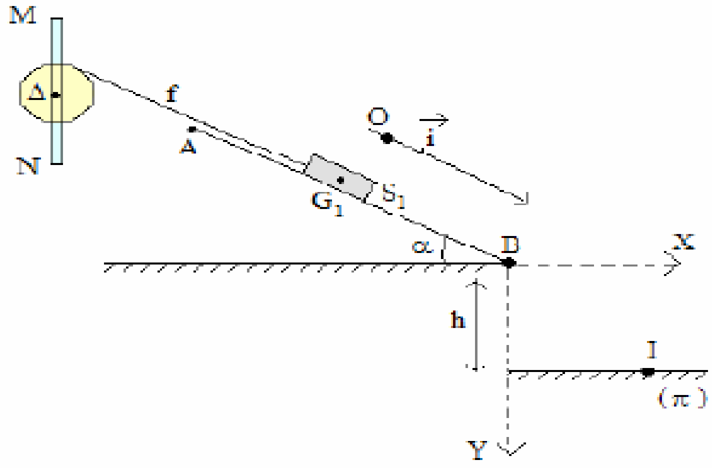
نعتبر المجموعة (S) الممثلة في الشكل – 1 و التي تتكون من :

- بكرة متجانسة شعاعها $r=5cm$ ملتحمة بساق طولها $MN=2L=40cm$ يتطابق مركز قصورها مع المركز G للبكرة . المجموعة " الساق + البكرة " قابلة للدوران في المستوى الرأسي حول محور أفقي (Δ) ثابت يمر من المركز G . عزم قصور المجموعة بالنسبة للمحور (Δ) هو J_Δ .
- خيط (f) غير مدود كتلته مهملة ملفوف حول مجرى البكرة و ثبت احد طرفيه بجسم صلب (S_1) ، كتلته $m=0.8kg$ و مركز قصوره G_1 . الجسم (S_1) قابل للانزلاق على مستوى مائل بزاوية $\alpha=30^0$ بالنسبة للمستوى الأفقي وفق الخط الأكبر ميلا .

نعتبر أن الخيط (f) لا ينزلق على مجرى البكرة أثناء الحركة . تحرر المجموعة بدون سرعة بدئية عند اللحظة $t=0$ حيث يكون G_1 منطبقا مع الأصل O للمعلم $(O,\vec{i})$. نعلم عند كل لحظة موضع G_1 بالافصول x .



الشكل 2



الشكل - 1

1 – اوجد ، اعتمادا على الدراسة التحريكية ، تعبير التسارع a لحركة الجسم (S_1) بدلالة : m ، J_Δ ، r ، α و g .

2 – يمثل منحنى الشكل – 2 تغيرات مربع السرعة للجسم (S) بدلالة x : $V^2 = f(x)$.

2 – 1 – حدد قيمة a و استنتج قيمة التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ للمجموعة " الساق + البكرة "

2 – 2 – ينفصل الجسم (S_1) عن الخيط لحظة مروره بالنقطة B ذات الأفصول $x_B = 0.8m$ فيسقط عند نقطة I على المستوى الأفقي (π) الذي يوجد على مسافة $h = 1m$ من النقطة B.

2 – 2 – 1 – اوجد إحداثيتي النقطة I في المعلم $(\overrightarrow{BX}.\overrightarrow{BY})$.

2 – 2 – 2 – احسب السرعة الخطية للطرف M للساق بعد انفصال الجسم (S_1) عن الخيط .

3 – نعيد ربط الخيط بالجسم (S_1) و نثبت بالساق في نقطة M' ، بحيث $MM' = \frac{L}{2}$ ، نابضا لفاته غير متصلة و كتلته مهملة و صلابته $K = 50 N.m^{-1}$ ، الطرف الثاني للنابض مثبت بحامل "الشكل – 3 " . يكون النابض عند التوازن أفقيا و مطالا و الساق MN رأسية و أفصولها G_1 منطبقا مع الأصل O للمعلم $(O;\vec{k})$.

3 – 1 – اوجد ، عند التوازن ، تعبير إطالة النابض Δl بدلالة المقادير اللازمة .

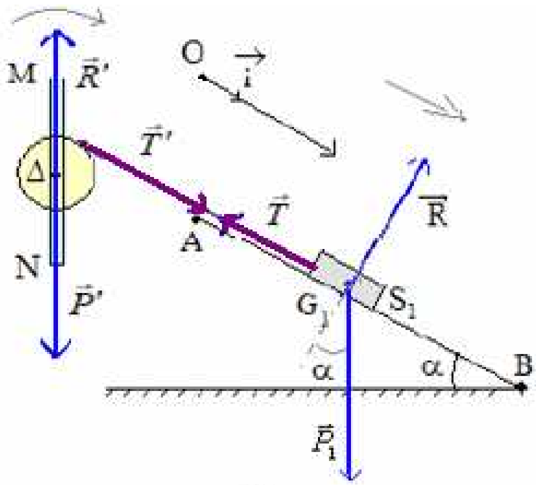
3 – 2 – نزيح الجسم (S_1) عن موضع توازنه بمسافة $d = 1m$ نحو الأسفل وفق الخط الأكبر ميلا فتدور المجموعة " الساق + البكرة " بزاوية صغيرة θ_0 و نحرره بدون سرعة بدئية عند اللحظة $t = 0$.

التصحيح

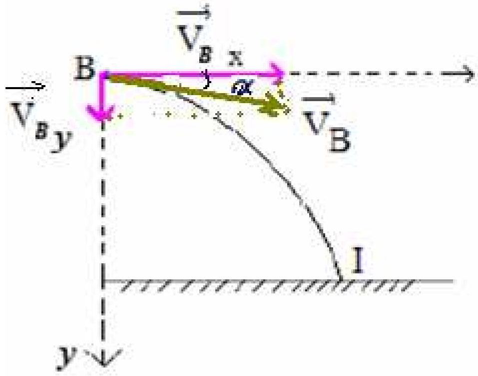
- 1

- المجموعة المدروسة : الجسم (S_1)
- المعلم : مرتبط بالأرض و يعتبر غاليليا
- جرد القوى : وزن الجسم $\vec{P_1}$ ، تأثير السطح $\vec{R}$ ، تأثير الخيط (f) $\vec{T}$.
- تطبيق ع . أ . د : $\sum \vec{F}_{APP} = m_1.\vec{a}$ و منه : $\vec{P_1} + \vec{R} + \vec{T} = m_1.\vec{a}$.
- إسقاط ع . أ . د على المحور $(O;\vec{i})$ نحصل على : $m_1.g.\sin\alpha - T = m_1.a$

و بالتالي : $\boxed{T = m_1.g.\sin\alpha - m_1.a}$ (1)



حساب التسارع الزاوي للمجموعة : $\ddot{\theta}=\frac{a}{r}=\frac{2.5}{5.10^{-2}}=50rad.s^{-2}$.



2 – 2 – 1 – إحداثيتي النقطة I :

- حساب السرعة V_B

باستعمال العلاقة المستقلة عن الزمن بين الموضعين O و B ،
نجد سرعة الجسم (S_1) عند الموضع B :

$$V_B=\sqrt{2.a.x_B}=2m.s^{-1}$$

- المعادلتين الزمنيتين :

$$\begin{cases} x=V_B.\cos(\alpha)t \\ y=\frac{1}{2}.g.t^2+V_B.\sin(\alpha)t \end{cases}$$

بعد إقصاء الزمن $t=\frac{x}{V_B.\cos(\alpha)}$ نحصل على معادلة المسار

$y=\frac{g}{2V_B^2.\cos^2(\alpha)}.x^2+\tan(\alpha).x$ و منه : $y_I=h=\frac{g}{2V_B^2.\cos^2(\alpha)}x_I^2+\tan(\alpha)x_I$ و بالتالي

- المجموعة المدروسة : البكرة
- المعلم : مرتبط بالأرض و يعتبر غاليليا
- جرد القوى : وزن البكرة $\vec{P}'$ ، تأثير محور الدوران $\vec{R}'$ ، تأثير الخيط (f) $\vec{T}'$
- تطبيق ع . أ . د : $\sum M_{\Delta}(\vec{F}_{app})=J_{\Delta}.\ddot{\theta}$ و منه :

$$M_{\Delta}(\vec{P}')+M_{\Delta}(\vec{R}')+M_{\Delta}(\vec{T}')=J_{\Delta}.\ddot{\theta} \quad \text{مع} \quad M_{\Delta}(\vec{P}')=M_{\Delta}(\vec{R}')=0$$

و بالتالي نحصل على المعادلة التالية : $\boxed{T'.r=J_{\Delta}.\ddot{\theta}}$ (2)

بما أن الخيط غير مدود و كتلته مهملة فان : $T'=T$ و من جهة أخرى لا ينزلق على مجرى البكرة فان :

$\theta=\frac{x}{r}$ و منه : $\ddot{\theta}=\frac{a}{r}$. من المعادلتين (1) و (2) نستنتج تعبير تسارع الجسم حيث : $a=g.\frac{m.\sin\alpha}{m+\frac{J_{\Delta}}{r^2}}$

2 – 1 - $V^2=f(x)$ دالة خطية معادلتها : $V^2=K.x$ مع K يمثل المعامل الموجه للمنحنى ، نحصل باشتقاق هذه المعادلة بالنسبة للزمن على : $2.V.\frac{dV}{dt}=K.V$ و منه : $a=\frac{K}{2}=\frac{1}{2}.\frac{\Delta(V^2)}{\Delta(x)}=2.5m.s^{-2}$.

نحصل على معادلة من الدرجة الثانية : $\frac{g}{2.V_B^2.\cos^2(\alpha)}.x_I^2+\tan(\alpha).x_I-h=0$ التي يمكن كتابتها على

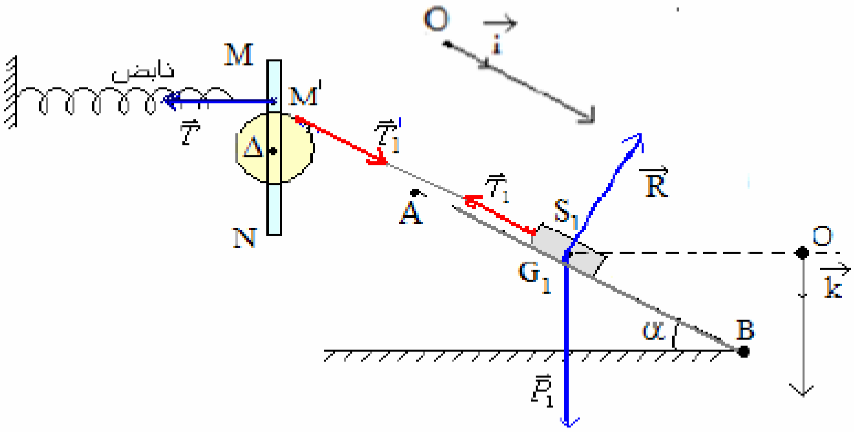
الشكل التالي : $1.66.x_I+0.577.x_I-1=0$ و أحد حلولها $x_I=0.62m$

إحداثيتي النقطة I $\left\{\begin{array}{l} x_I=0.62m \\ y_I=1m \end{array}\right.$

2 – 2 – 2 السرعة الخطية للطرف M بعد انفصال الجسم :

$\dot{\theta}_B=\dot{\theta}_M$ و التعويض نجد : $\frac{V_B}{r}=\frac{V_M}{L}$

و بالتالي : $\boxed{V_M=V_B\frac{L}{r}=8m.s^{-1}}$.



1-3 دراسة التوازن :

- الجسم (S_1) : $\sum\vec{F}=\vec{0}$ و منه : $T_1=m_1.g.\sin(\alpha)$
- البكرة : $\sum M_\Delta=0$ و منه $T.\frac{L}{2}=T_1'.r$ حيث $T=K.\Delta l$ و $T_1'=T_1$

إطالة النابض عند التوازن من خلال العلاقتين السابقتين : $\boxed{\Delta l=2.\frac{m.g.r.\sin(\alpha)}{K.L}}$

3 – 2 – 1 الدراسة الطاقوية للمجموعة " (S) "

- الطاقة الحركية : $\boxed{E_C=\frac{1}{2}.m.V^2+\frac{1}{2}.J_\Delta.\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}.m.V^2+\frac{1}{2}.J_\Delta.\frac{V^2}{r^2}=\left(\frac{J_\Delta}{r^2}+m\right)\frac{V^2}{2}}$
- طاقة الوضع المرنة : $E_{Pe}=\frac{1}{2}.K(\Delta l+d)^2+C^{te}$ مع الثابتة $C^{te}=0$ حسب مرجع طاقة الوضع

المرنة و كذلك : $d = \frac{L}{2}.\theta$ و بالتالي :

$$\boxed{E_{Pe} = \frac{1}{2}.K\left(\Delta l + \frac{L}{2}.\theta\right)^2 = \frac{1}{2}.K.\Delta l^2 + \frac{1}{2}.K.\frac{L^2.\theta^2}{4} + \frac{1}{2}.K.\Delta l.\theta}$$

- طاقة الوضع الثقالية : $E_{PP} = -m.g.z + C^{te}$ مع الثابتة $C^{te} = 0$ و بالتالي : $\boxed{E_{PP} = -m.g.z}$

بما ان جميع الاحتكاكات مهملة فان الطاقة الميكانيكية تنحفظ و بالتالي : $\frac{dE_m}{dt} = 0$ و منه نحصل بالاشتقاق على :

- $$\frac{dE_C}{dt} = \left(\frac{J_\Delta}{r^2} + m\right)V.\dot{V} = \left(\frac{J_\Delta}{r^2} + m\right)\dot{x}.\ddot{x} = \left(\frac{J_\Delta}{r^2} + m\right)\frac{\dot{z}}{\sin(\alpha)}.\frac{\ddot{z}}{\sin(\alpha)}$$

- $$\frac{dE_{Pe}}{dt} = K.L^2\frac{\theta.\dot{\theta}}{4} + \frac{K.\Delta l.L.\dot{\theta}}{2} = K.\frac{L^2}{4}.\frac{x}{r}.\frac{\dot{x}}{r} + \frac{K.\Delta l.L.\dot{x}}{r}$$
$$\frac{dE_{Pe}}{dt} = K.\frac{L^2}{4}.\frac{z}{r.\sin(\alpha)}.\frac{\dot{z}}{r.\sin(\alpha)} + \frac{K.\Delta l.L\dot{z}}{2.r.\sin(\alpha)}$$
$$z = x\sin\alpha$$

- $$\frac{dE_{PP}}{dt} = -m.g.\dot{z}$$

و بالتعويض :

$$\frac{dE_m}{dt} = \left(\frac{J_\Delta}{r^2} + m\right)\frac{\dot{z}.\ddot{z}}{\sin^2(\alpha)} + \frac{K.L^2.z.\dot{z}}{4.r^2.\sin^2(\alpha)} + \frac{K.L.\Delta l.\dot{z}}{2.r.\sin(\alpha)} - m.g.\dot{z} = 0$$

من خلال العلاقة المحصل عليها في الدراسة السكونية : $m.g = \frac{K.L.\Delta l}{2.r.\sin(\alpha)}$ و بالتالي :

$$\frac{dE_m}{dt} = \left(\frac{J_\Delta}{r^2} + m\right)\frac{\dot{z}.\ddot{z}}{\sin^2(\alpha)} + \frac{K.L^2.z.\dot{z}}{4.r^2.\sin^2(\alpha)} = 0$$

و بالتالي : $\left(\frac{J_\Delta}{r^2} + m\right)\ddot{z} + \frac{K.L^2.z}{4.r^2} = 0$ و منه نحصل على المعادلة التفاضلية : $\boxed{\ddot{z} + \frac{K.L^2}{4(J_\Delta + m.r^2)}.z = 0}$

معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الثانية معاملها $\omega_0^2 = \frac{K.L}{4(J_\Delta + m.r^2)}$ ثابت و موجب و حلها جيبي .

3 – 2 – 2 – المعادلة الزمنية لحركة الجسم : $z = z_m.\cos(\omega_0.t + \varphi)$ حيث : $\omega_0 = \frac{2.\pi}{0.5} = 4.\pi\ rad.s^{-1}$ و

$\varphi = 0$ لان عند $t = 0$ $z = z_m = d.\sin(\alpha)$ و بالتالي : $z = 5.10^{-2}.\cos(4.\pi.t)$.

تصحيح الموضوع الأول : عبد الكريم سبيرو

الموضوع الثاني : عبد العلي رضوان

Sbiro abdelkrim lycée agricole oulad-taima région d'agadir maroc

MAIL :sbiabdou@yahoo.fr msen messager : sbiabdou@hotmail.fr