السنة الدراسية:2012/2013	تصحيح فرض محروس رقم 2 الدورة الاولى في مادة الرياضيات	ثانوية الجاحظ التأهيلية نيابة زاكورة – بتزموط
المدة التي انجزا فيها : ساعتان		
استاذ : عبد الفتاح قويدر		القسم : 1 علوم تجريبية 1

تمرين 1:

لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي : $\begin{cases} U_0 = 11 \\ U_{n+1} = \frac{10}{11}U_n + \frac{12}{11} \; ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) احسب U_1 و U_2:

$U_1 = \frac{122}{11}$ و $U_2 = \frac{1252}{121}$

2) تحقق من ان : $U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(U_n - 12)$ لكل n من $\mathbb{N}$

$$U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}U_n + \frac{12}{11} - 12 = \frac{10}{11}U_n - \frac{120}{11} = \frac{10}{11}(U_n - 12)$$

وبالتالي $U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(U_n - 12)$ لكل n من $\mathbb{N}$

3) أ- بين بالترجع ان $U_n < 12$ لكل n من $\mathbb{N}$

من اجل $n = 0$ لدينا $U_0 = 11$ و $11 \leq 12$ اذن $U_0 \leq 12$

نفترض ان : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; U_n \leq 12$ و نبين ان $U_{n+1} \leq 12$

لدينا $U_n \leq 12$ و اي ان $\frac{10}{11}U_n \leq \frac{120}{11}$ اي $\frac{10}{11}U_n + \frac{12}{11} \leq \frac{120}{11} + \frac{12}{11}$

وبالتالي $U_{n+1} \leq \frac{132}{11}$ ومنه $U_{n+1} \leq 12$

ومنه $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; U_n \leq 12$

ب- بين ان (U_n) تزايدية قطعا

$$U_{n+1} - U_n = \frac{10}{11}U_n + \frac{12}{11} - U_n = \frac{-1}{11}U_n + \frac{12}{11} = \frac{1}{11}(12 - U_n) > 0$$

(لان $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; U_n \leq 12$)

4) لتكن (V_n) المتتالية العددية بحيث $V_n = U_n - 12 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

أ- بين ان المتتالية (V_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{10}{11}$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(U_n - 12) = \frac{10}{11}V_n = qV_n$$

ومنه فان المتتالية (V_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{10}{11}$

ب- اكتب (V_n) بدلالة n

لدينا $\forall n \in \mathbb{N} \; V_n = U_n - 12$ وبالتالي $V_0 = U_0 - 12 = 11 - 12 = -1$

وبماأن المتتالية (V_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{10}{11}$

فإن $\forall n \in \mathbb{N} \; V_n = V_0 q^n = -1 \times (4)^n = -(4)^n$

ت- بين ان $\forall n \in \mathbb{N} \; U_n = 12 - (\frac{10}{11})^n$

$$\forall n \in \mathbb{N} \; V_n = U_n - 12 \Leftrightarrow U_n = V_n + 12 = 12 - (\frac{10}{11})^n$$

تمرين III (*): لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي :

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} \text{ و } U_0 \in [0;1]$$

1- بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} ;\ U_n \in [0;1]$

من اجل n=0 لدينا $U_0 \in [0;1]$ ومنه الخاصية صحيحة من اجل n=0

نفترض $\forall n \in \mathbb{N} ;\ U_n \in [0;1]$

ونبين ان $U_{n+1} \in [0;1]$

لدينا $0 \le U_n \le 1$ يعني $1 \le U_n + 1 \le 2$ اي $\frac{1}{2} \le \frac{U_n+1}{2} \le 1$

ومنه $0 \le \sqrt{\frac{1}{2}} \le \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} \le 1$ وبالتالي $U_{n+1} \in [0;1]$

اذن $\forall n \in \mathbb{N} ;\ U_n \in [0;1]$

2- بين أن : المتتالية U_n تزايدية

ضرب في المرافق

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} - U_n = \frac{\frac{1+U_n}{2} - U_n}{\sqrt{\frac{1+U_n}{2}} + U_n} = \frac{1+U_n-U_n^2}{2\left(\sqrt{\frac{1+U_n}{2}}+U_n\right)} = \frac{(1-U_n)(1+2U_n)}{2\left(\sqrt{\frac{1+U_n}{2}}+U_n\right)}$$

ولدينا $U_n \le 1$ اي $1 - U_n \ge 0$ و $0 \le U_n \le 1$ اي $1 \le 1 + 2U_n \le 3$

اذن $(1-U_n)(1+2U_n) \ge 0$ و $2\left(\sqrt{\frac{1+U_n}{2}} + U_n\right) \ge 0$

وبالتالي $U_{n+1} - U_n \ge 0$ وهذا يعني ان المتتالية U_n تزايدية

3- نضع: $U_0 = \cos(\theta)$ حيث $\theta \in [0;\frac{\pi}{2}]$

بين أن $\forall n \in \mathbb{N} ;\ U_n = \cos(\frac{\theta}{2^n})$ (علما ان $2\cos^2(y) = 1 + \cos(2y)$)

من اجل n=0 لدينا $U_0 = \cos(\theta)$ ومنه الخاصية صحيحة من اجل n=0

الاستدلال بالترجع

نفترض $\forall n \in \mathbb{N} ;\ U_n = \cos(\frac{\theta}{2^n})$

ونبين ان $U_{n+1} = \cos(\frac{\theta}{2^{n+1}})$

لدينا $U_n = \cos(\frac{\theta}{2^n})$

فإن

$$U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos(\frac{\theta}{2^n})}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos(2\frac{\theta}{2^{n+1}})}{2}} = \sqrt{\frac{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}{2}}$$

(علما ان $2\cos^2(y) = 1 + \cos(2y)$)

اي $U_{n+1} = \cos(\frac{\theta}{2^{n+1}})$

ومنه $\forall n \in \mathbb{N} ;\ U_n = \cos(\frac{\theta}{2^n})$

هذا وبالله التوفيق