

المادة: الرياضيات

مذكرة رقم : 1
الأستاذ : عثمانى نجيب

ملخص لدروس المتتاليات الترجيعية

مستوى: السنة الثانية من سلك البكالوريا

- شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
- شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

1. المتتاليات الحسابية: تذكير

تمرين 1

لاحظ ثم أتمم بأربعة أعداد ملائمة لتسلسل كل متتالية من المتتاليات التالية :

1. 0 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10 ,

2. 6 , 3 , 0 , -3 , -6 , -9 , -12 ,

3. 1 , 3 , 9 , 27 , 81 , 243 ,

4. 1 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$,

5. 1 , 2 , 4 , 9 , 16 , 32 , 64 ,

مثال 1: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n - 1$

- أحسب حدها الأول u_0
- أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$
- أحسب $u_{n+1} - u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. تعريف :

نقول إن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي r بحيث : $\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = u_n + r$

العدد الحقيقي r يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$

تمرين 2 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n + 3$

1. أحسب : $u_{n+1} - u_n$

2. ماذا تستنتج ؟

2. صيغة الحد العام للمتتالية بدلالة n :

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_{n_0} فإن : $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$

نتيجة : إذا كانت $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r فإن : $u_n = u_p + (n - p)r$ لكل $n \geq n_0$ و $p \geq n_0$

3. مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية :

لنكن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية حسابية

نضع $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$ حيث $n > p \geq n_0$

$$S_n = (n - p + 1) \left(\frac{u_n + u_p}{2} \right) \text{ لدينا}$$

المجموع $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$ يحتوي على $(n - p + 1)$ حد

تمرين 3 :

1. لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0 = 1$

أحسب المجموع التالي : $S_1 = u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{30}$

2. لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -2$ و حدها الأول $u_0 = 4$

أحسب المجموع التالي : $S_2 = u_7 + u_8 + u_9 + \dots + u_{25}$

تمرين 4 : تعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالصيغة التالية : $u_n = \frac{n+3}{4}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1. تحقق أن $(u_n)_{n \geq 0}$ حسابية

2. أحسب المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_6$

II. المتتاليات الهندسية

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $u_n = 2 \times 3^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1. أحسب حدها الأول u_0

2. أحسب $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

3. ماذا تستنتج ?

1. تعريف:

نقول إن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي q بحيث : $\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = qu_n$

العدد الحقيقي q يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$

تمرين 5 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$

بين أن (u_n) متتالية هندسية و حدد أساسها و حدها الأول

2. صيغة الحد العام للمتتالية بدلالة n :

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q غير منعدم و حدها الأول u_{n_0} فإن : $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$

نتيجة : إذا كانت $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q غير منعدم فإن : $u_n = u_m q^{n-m}$ لكل $m \geq n_0$ و $n \geq n_0$

3. مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية :

لتكن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية هندسية أساسها q غير منعدم نضع $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$

حيث $n > p \geq n_0$ لدينا :

• إذا كان $q \neq 1$ فإن : $S_n = u_p \left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \right)$

• إذا كان $q = 1$ فإن : $S_n = (n - p + 1) \times u_p$

تمرين 6 :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالصيغة التالية : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 3 \times U_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1. تحقق أن $(u_n)_{n \geq 0}$ هندسية

2. أعبّر عن U_n بدلالة n

3. أحسب المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_6$

III. المتتاليات من صنف $U_{n+1} = aU_n + b$

مثال : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بالعلاقة الترجيعية التالية :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$$

أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n)
ملاحظة : هذه المتتالية تسمى متتالية ترجيعية

تمرين 7 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بالعلاقة :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 8$$

1. نفترض أن $u_0 = 12$ أحسب u_1 و u_2 و u_3
2. نفترض أن $u_0 = 3$ أحسب u_1 و u_2 و u_3

تمرين 8 : نعتبر المتتالية الترجيعية (u_n) المعرفة كالتالي :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$
 أحسب u_1 و u_2 و u_3

تمرين 9 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 \\ u_0 = 10 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - 3$$

1. أحسب v_0 و v_1 و v_2
2. أحسب $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ واستنتج طبيعة المتتالية (v_n)
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أحسب بدلالة n المجموع : $S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

تمرين 10 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 2 \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + 2$$

1. أحسب v_0 و v_1
2. أحسب $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ واستنتج طبيعة المتتالية (v_n)
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أنشئ في معلم متعامد ممنظم المستقيم ذو المعادلة : $y = x$ و المستقيم ذو المعادلة : $y = 2x + 2$
6. مثل مبيانيا الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (u_n)

تمرين 11 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 5^n - 1$$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3
2. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 5u_n + 4$

تمرين 12 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 \times 3^n - 1$$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3
2. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n + 2$

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1 \\ u_0 = 3 \end{cases} \quad \text{تمرين 13 : نعتبر المتتالية العددية } (u_n) \text{ المعرفة كالتالي :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - \frac{2}{3} \quad \text{ونعتبر المتتالية العددية } (v_n) \text{ المعرفة كالتالي :}$$

1. أحسب v_1 و v_0
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها : $-\frac{1}{2}$
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أنشئ في معلم متعامد ممنظم المستقيم ذو المعادلة : $y = x$ و المستقيم ذو المعادلة : $y = 2x + 2$
6. مثل مبيانيا الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (u_n)

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2} \\ u_0 = 3 \end{cases} \quad \text{تمرين 14 : نعتبر المتتالية العددية } (u_n) \text{ المعرفة كالتالي :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + 1 \quad \text{ونعتبر المتتالية العددية } (v_n) \text{ المعرفة كالتالي :}$$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + \frac{3}{2} \\ u_0 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{تمرين 15 : نعتبر المتتالية العددية } (u_n) \text{ المعرفة كالتالي :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + \frac{3}{4} \quad \text{ونعتبر المتتالية العددية } (v_n) \text{ المعرفة كالتالي :}$$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 3
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{13}{12} \times 3^n - \frac{3}{4}$
5. أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases} \quad \text{تمرين 16 : نعتبر المتتالية العددية } (u_n) \text{ المعرفة كالتالي :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - \frac{8}{3} \quad \text{ونعتبر المتتالية العددية } (v_n) \text{ المعرفة كالتالي :}$$

1. أحسب v_0 و v_1

2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها : $\frac{1}{4}$

3. أكتب v_n بدلالة n

4. استنتج u_n بدلالة n

5. أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

6. بين أن:
$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} = -\frac{44}{9} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right)$$

7. بين أن:
$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} = -\frac{44}{9} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) + \frac{8}{3}n$$