

الترتيب في IR

القدرات المنتظرة

- *- التمكن من مختلف تقنيات مقارنة عددين (أو تعبيرين) واستعمال المناسب منها حسب الوضعية المدروسة.
- *- تمثيل مختلف العلاقات المرتبطة بالترتيب على المستقيم العددي.
- *- إدراك وتحديد تقريب عدد (أو تعبير) بدقة معلومة. إنجاز إكبارات أو إصغارات لتعابير جبرية.
- *- استعمال المحسبة لتحديد قيم مقربة لعدد حقيقي.

I- الترتيب و العمليات

1- أنشطة

تمرين 1

ليكن a عددا حقيقيا قارن $2a$ و $a^2 + 1$

تمرين 2

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $-2 \leq a \leq 3$; $-1 \leq b \leq 4$
بين أن $-41 \leq a^2 - b^2 + 3a - 5b + 1 \leq 24$

تمرين 3

قارن $3\sqrt{3}$ و $1+3\sqrt{2}$

تمرين 4

ليكن $x \in \mathbb{R}_+$

أ- بين أن $\sqrt{x^2+1}-x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

ب- قارن $\sqrt{x^2+1}-x$ و $\frac{1}{2x}$

تمرين 5

ليكن a و b عددين حقيقيين سالبين قطعاً حيث $a \neq b$

قارن $1-\frac{b}{a}$ و $\frac{a}{b}-1$

2- تعريف و خاصيات

أ تعريف

ليكن a و b عددين حقيقيين

$$a \geq b \text{ يعني } a - b \geq 0$$

$$a \leq b \text{ يعني } a - b \leq 0$$

ب- خاصيات و نتائج

ليكن a و b و c و d أعداد حقيقية

$$\text{إذا كان } a \geq b \text{ و } b \geq c \text{ فإن } a \geq c$$

$$\text{إذا كان } a \geq b \text{ فإن } a + c \geq b + c$$

$$\text{إذا كان } a \geq b \text{ و } c \geq d \text{ فإن } a + c \geq b + d$$

$$\text{إذا كان } a \geq b \text{ و } c \geq 0 \text{ فإن } ac \geq bc$$

$$\text{إذا كان } a \geq b \text{ و } c \leq 0 \text{ فإن } ac \leq bc$$

$$\text{إذا كان } a \geq b \geq 0 \text{ فإن } a^2 \geq b^2$$

$$\text{إذا كان } 0 \geq a \geq b \text{ فإن } a^2 \leq b^2$$

$$0 \leq a \leq b \text{ تكافئ } \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$$

$$\text{إذا كان } a \text{ و } b \text{ عددين غير منعدمين و لهما نفس لإشارة و كان } a \leq b \text{ فإن } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

نبين نتيجة الأخيرة
 a و b عددين غير منعدمين و لهما نفس لإشارة ومنه $ab > 0$
لدينا $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$
وحيث أن $a \leq b$ فإن $b-a \geq 0$ و بالتالي $\frac{b-a}{ab} \geq 0$ اذن $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

II- المجالات

1- مجالات المجموعة \mathbb{R}

ليكن $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ حيث $a < b$

قراءة و تمثيل على المستقيم	ترميزها	مجموعة الاعداد الحقيقية X حيث:
يقراً المجال المغلق الذي طرفاه a و b 	$[a; b]$	$a \leq x \leq b$
يقراً المجال المفتوح الذي طرفاه a و b 	$]a; b[$	$a < x < b$
يقراً المجال المفتوح على اليمين الذي طرفاه a و b 	$[a; b[$	$a \leq x < b$
يقراً المجال المفتوح على اليسار الذي طرفاه a و b 	$]a; b]$	$a < x \leq b$
يقراً المجال a زائد ما لانهاية مغلق في a 	$[a; +\infty[$	$a \leq x$
يقراً المجال a زائد ما لانهاية مفتوح في a 	$]a; +\infty[$	$a < x$
يقراً المجال ناقص لانهاية، b مغلق في b 	$] -\infty; b]$	$x \leq b$
يقراً المجال ناقص لانهاية، b مفتوح في b 	$] -\infty; b[$	$x < b$

أمثلة

$$[-1; 4] = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 4\}^*$$

$$\sqrt{3} \in [-1; 4] \quad \frac{-1}{2} \in [-1; 4] \quad -2 \notin [-1; 4]$$

$$]-\infty; 2[= \{x \in \mathbb{R} / x < 2\}^*$$

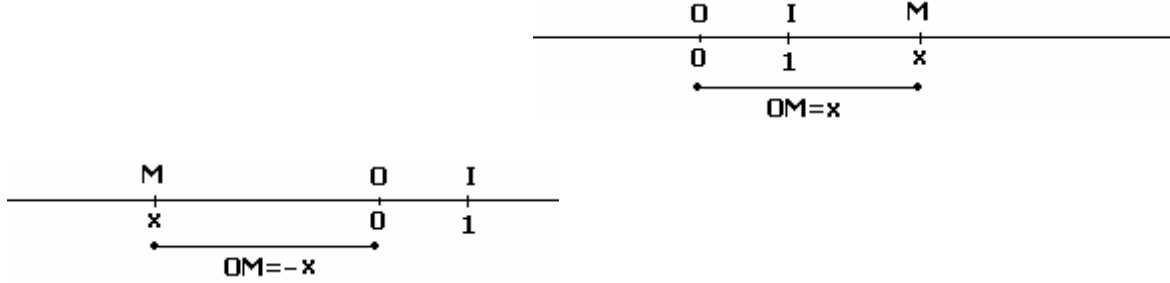
$$-\sqrt{2} \in]-\infty; 2[\quad \pi \notin]-\infty; 2[\quad 2 \notin]-\infty; 2[$$

III- القيمة المطلقة

1- القيمة و المطلقة

تعريف

ليكن $\Delta(O; I)$ مستقيما مدرجا
القيمة المطلقة لكل عدد حقيقي x هي المسافة بين النقطة M التي أفصولها x
و النقطة O . نكتب $OM = |x|$ نكتب



ليكن $x \in \mathbb{R}$

إذا كان $x \geq 0$ فإن $|x| = x$

إذا كان $x \leq 0$ فإن $|x| = -x$

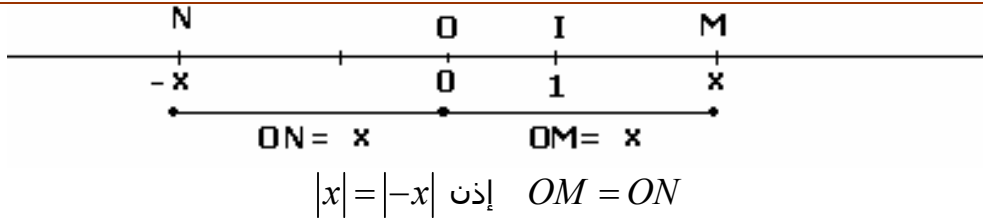
أمثلة

$$|2 - \pi| = \pi - 2 ; \quad |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1 ; \quad |-12| = 12 ; \quad |\sqrt{2}| = \sqrt{2}$$

تمرين

$$\text{حدد } |1 - \sqrt{2}| \text{ و } \sqrt{(4 - \sqrt{15})^2} \text{ و } \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2}$$

(c) خاصيات



*- لكل $x \in \mathbb{R}$ $|x| \geq 0$ ، $x \leq |x|$ ، $-x \leq |x|$ ، $|x| = |-x|$ ، $|x|^2 = x^2$

*- ليكن x و y من \mathbb{R} و a من \mathbb{R}^+

✓ $|x| = 0$ تكافئ $x = 0$

✓ $|x| = a$ تكافئ $x = a$ أو $x = -a$

✓ $|x| = |y|$ تكافئ $x = y$ أو $x = -y$.

✓ $|xy| = |x||y|$; $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$; $y \neq 0$

✓ $|x| \leq a$ تكافئ $-a \leq x \leq a$

✓ $|x + y| \leq |x| + |y|$

بين نتيجتين الأخيرتين

تمارين

تمرين 1

ليكن $x \in \mathbb{R}$

1- أكتب التعبيرات التالية بدون استعمال القيمة المطلقة

$$|x-2| + |x+3| \quad , \quad |3-x| \quad , \quad |2x-1|$$

2- بين بدون حذف رمز القيمة المطلقة أن $|x-5| + |x+1| \neq 4$ لكل x من \mathbb{R}

تمرين 2

ليكن $x \in \mathbb{R}$

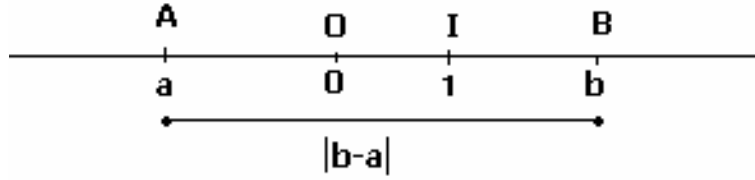
بين إذا كان $|x-1| < 10^{-3}$ فإن $|x^2-1| < 10^{-2}$

2- المسافة بين نقطتين و القيمة المطلقة

خاصية

ليكن $A(a)$ و $B(b)$ نقطتين على مستقيم مدرج $\Delta(O;I)$

$$AB = |b-a|$$



تعريف

المسافة $|b-a|$ لنقطتين $A(a)$ و $B(b)$ على مستقيم مدرج ، تسمى أيضا

المسافة بين العددين a و b

أمثلة

* لنحدد الأعداد x التي مسافتها عن 3 هي 5

* حدد هندسيا على المستقيم المدرج $\Delta(O;I)$ النقطة $M(x)$ حيث $|x-2| = |x+5|$

3- مركز و سعة و شعاع مجال

ليكن $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

على المستقيم المدرج $\Delta(O;I)$ نعتبر $A(a)$; $B(b)$

طول $[A;B]$ هو $|b-a|$

أفصول I منتصف $[A;B]$ هو $\frac{a+b}{2}$

$$IA = IB = \frac{|b-a|}{2}$$

تعريف

ليكن $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

مركز مجال طرفاه a و b هو $\frac{a+b}{2}$

سعة مجال طرفاه a و b هو $|b-a|$

شعاع مجال طرفاه a و b هو $\frac{|b-a|}{2}$

تمرين

- 1- حدد مركز وشعاع $]-3;5]$
- 2- حدد مجالا مفتوحا مركزه 2- وشعاعه 3
- 3- حدد مجالا مغلقا مركزه 1 و أحد طرفيه $\frac{-3}{2}$

4- القيمة المطلقة والمجالات

مبرهنة

ليكن x و a من \mathbb{R} و $r \in \mathbb{R}_+^*$

$|x - a| \leq r$ تكافئ $a - r \leq x \leq a + r$

$$[a - r; a + r] = \{x \in \mathbb{R} / |x - a| \leq r\}$$

مجال مغلق مركزه a و شعاعه r

نتيجة

ليكن x و a من \mathbb{R} و $r \in \mathbb{R}_+^*$

$|x - a| < r$ تكافئ $a - r < x < a + r$

$$]a - r; a + r[= \{x \in \mathbb{R} / |x - a| < r\}$$

مجال مفتوح مركزه a و شعاعه r

نتيجة

ليكن x و a من \mathbb{R} و $r \in \mathbb{R}_+^*$

$|x - a| \geq r$ تكافئ $x \leq a - r$ أو $x \geq a + r$

$$\{x \in \mathbb{R} / |x - a| \geq r\} =]-\infty; a - r] \cup [a + r; +\infty[$$

مجال مفتوح مركزه a و شعاعه r

تمرين

حدد المجموعات التالية

$$A = \{x \in \mathbb{R} / |x - 3| \leq 2\} \text{ و } B = \{x \in \mathbb{R} / |x + 4| < 7\} \text{ و } C = \{x \in \mathbb{R} / |x - 1| \geq 2\}$$

IV- التآطير و التقريب

(A) التآطير

1- أنشطة

- أ- حدد مجالا مفتوحا سعته 10^{-2} يحتوي على $\frac{2}{3}$
 - ب- علما أن $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$
- حدد مجالا مغلقا يحتوي على $3\sqrt{2}$ سعته $7 \cdot 10^{-2}$

2- تعريف

ليكن $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ حيث $a < b$
كل متفاوتة من المتفاوتات المزدوجة $a \leq x \leq b$ و $a < x \leq b$ و $a \leq x < b$ و $a < x < b$ تسمى
تأطيرا للعدد x سعته $b - a$

أمثلة

$$0 < \frac{2}{3} < 1 \quad \text{تأطير للعدد } \frac{2}{3} \text{ سعته } 1$$
$$0,666 < \frac{2}{3} < 0,667 \quad \text{تأطير للعدد } \frac{2}{3} \text{ سعته } 10^{-3}$$

تمارين

تمرين 1

1- ليكن $-3 < x < 5$; $2 < y < 4$ أطر $x^2 + 3x - \frac{1}{y} - 5$

2- ليكن $|x| < 1$; $|y| < 1$

أ- أطر $\frac{1}{x + y + xy + 4}$

ب- أطر $(x + 1)(y + 1)$. أنشر $(x + 1)(y + 1)$

استنتج تأطيرا للعدد $\frac{1}{x + y + xy + 4}$

تمرين 2

1- لنحدد تأطيرا للعدد $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ سعته $7 \cdot 10^{-3}$ علما أن $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$

2- نعتبر $-0,01 < y < 0,02$, $1,53 < x < 1,54$

حدد تأطيرا للعدد xy سعته $6 \cdot 10^{-2}$

تمرين 3

ليكن $0,2 < y < 0,4$, $1,2 < x < 1,4$

حدد تأطيرا للعدد $\frac{y}{x}$ سعته $0,20$

(B) التقريب

1- تعريف

ليكن $a \leq x \leq b$ أو $a < x \leq b$ أو $a \leq x < b$ أو $a < x < b$ تأطيرا للعدد x
سعته $b - a$

العدد a يسمى تقريبا للعدد x إلى $b - a$ بتفريط
العدد b يسمى تقريبا للعدد x إلى $b - a$ بإفراط

أمثلة

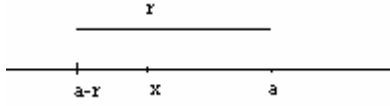
لدينا $3,14 < \pi < 3,15$

العدد $3,14$ تقريبا للعدد π إلى 10^{-2} بتفريط

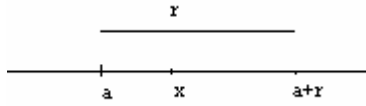
العدد $3,15$ تقريبا للعدد π إلى 10^{-2} بإفراط

خاصية

ليكن a و x عددين حقيقيين و a عددا حقيقيا موجب قطعاً
العدد a تقرب للعدد x إلى r بإفراط إذا فقط إذا كان $a - r \leq x \leq a$



العدد a تقرب للعدد x إلى r بتفريط إذا فقط إذا كان $a \leq x \leq a + r$



تمرين لنحدد تقريبات للعدد $\frac{22}{3}$ إلى 10^{-3} بإفراط

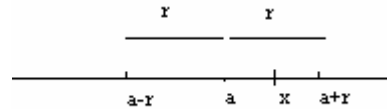
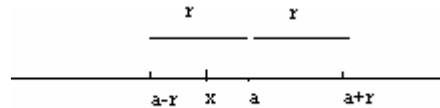
تمرين ليكن $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

إذا علمت أن 2,236 تقرب للعدد $\sqrt{5}$ إلى 10^{-3} بتفريط فأعط تقرب للعدد x إلى 10^{-3} بتفريط ثم بإفراط

2- قيمة مقربة

تعريف

ليكن x عددا حقيقيا و r عددا حقيقيا موجبا
كل عدد حقيقي a يحقق $|x - a| \leq r$ يسمى قيمة مقربة (أو تقريبا) للعدد x إلى r
(أو بالدقة r)



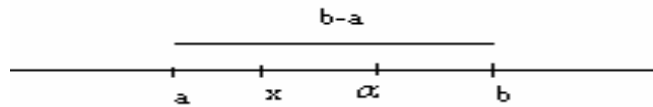
أمثلة

$$\left| \frac{22}{7} - 3,14 \right| \leq 0,003 \quad \text{إذن } 3,14 \text{ تقرب للعدد } \frac{22}{7} \text{ إلى } 3 \cdot 10^{-3}$$

خاصية

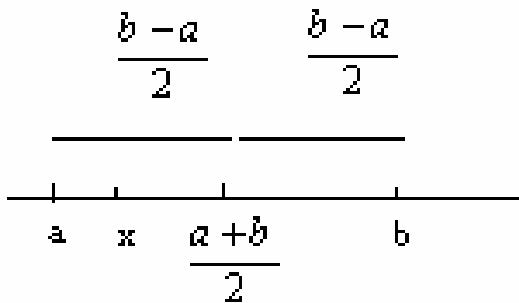
ليكن $x \in [a, b]$

كل عدد α من $[a, b]$ تقرب للعدد x إلى $b - a$



ملاحظة

إذا كان $x \in [a, b]$ فإن $\frac{a+b}{2}$ تقرب للعدد x إلى $\frac{b-a}{2}$



مثال

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

العدد 1,415 تقرب للعدد $\sqrt{2}$ إلى 0,005

تمرين

لنبين أن -0,14 تقرب للعدد $\frac{-1}{7}$ بالدقة $5 \cdot 10^{-3}$

3- التقريبات العشرية أ- استعمال المحسبة لتحديد تقريبات عشرية

ب- التقريب العشري

ليكن x عددا حقيقيا و n عددا صحيحا طبيعيا
نقبل انه يوجد عدد صحيح نسبي و حيد p حيث $10^{-n} p \leq x < 10^{-n} (p+1)$
العدد $10^{-n} p$ **تقريب العشري** للعدد x بتفريط إلى 10^{-n} (أو من الرتبة n)
العدد $10^{-n} (p+1)$ **تقريب العشري** للعدد x بإفراط إلى 10^{-n} (أو من الرتبة n)

اصطلاح:

التقريب العشري من الرتبة n الأكثر قربا من العدد x يسمى الجبر (*arrondi*) من الرتبة n للعدد x

مثال لدينا $666 \cdot 10^{-3} < \frac{2}{3} < 667 \cdot 10^{-3}$

العدد 0,666 تقريب العشري للعدد $\frac{2}{3}$ من الرتبة 3 بتفريط

العدد 0,667 تقريب العشري للعدد $\frac{2}{3}$ من الرتبة 3 بإفراط

نلاحظ أن $\frac{2}{3} - 0,666 = \frac{0,002}{3}$; $0,667 - \frac{2}{3} = \frac{0,001}{3}$

0,667 الجبر للعدد $\frac{2}{3}$ من الرتبة 3

تمرين

1,24 التقريب العشري للعدد x من الرتبة 2 بتفريط و $-0,31 < y < -0,25$

أطر $\frac{y}{x}$ تأطيرا سعته 0,05